α) Το τριώνυμο $x^2 - 6x + λ - 7$ έχει $α = 1$, $β = -6$, $γ = λ - 7$ και διακρίνουσα:

$$Δ = β^2 - 4αγ = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (λ - 7) = 36 - 4λ + 28 = 64 - 4λ$$

Το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν:

$$Δ \geq 0 \Leftrightarrow 64 - 4λ \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4λ \geq -64 \Leftrightarrow λ \leq 16$$

β) i) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{β}{α} = -\frac{-6}{1} = 6 \quad \text{και}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{γ}{α} = \frac{λ-7}{1} = λ - 7$$

ii) Το τριώνυμο έχει δύο άνισες και ομόσημες ρίζες αν και μόνο αν:

$$(Δ > 0 \text{ και } P > 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (64 - 4λ > 0 \text{ και } λ - 7 > 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-4λ > -64 \text{ και } λ > 7) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (λ < 16 \text{ και } λ > 7) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7 < λ < 16$$

Επειδή $S = 6 > 0$, οι ρίζες είναι θετικές.

γ) i) Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$x^2 - 6|x| + λ = 7 \Leftrightarrow |x|^2 - 6|x| + λ - 7 = 0 \quad (2)$$

Θέτουμε στη (2) $|x| = y$ και έχουμε:

$$y^2 - 6y + λ - 7 = 0 \quad (3)$$

Επομένως για να έχει η εξίσωση (2) τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες αρκεί η εξίσωση (3) να έχει δύο θετικές άνισες μεταξύ τους πραγματικές ρίζες. Από το σκέλος (iiβ) προκύπτει ότι αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν:

$$7 < λ < 16$$

ii) Ισχύει ότι:

$$7 < 3\sqrt{10} < 16 \Leftrightarrow \sqrt{49} < \sqrt{90} < \sqrt{256}, \text{ το οποίο ισχύει}$$

Τελικά για $λ = 3\sqrt{10}$ η εξίσωση (2) οπότε και η (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.