

α) Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α και β έχει εμβαδόν $E = \alpha\beta$ (1).

Οι αριθμοί α , E , β , με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει:

$$E^2 = \alpha\beta \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} E^2 = E \stackrel{E \neq 0}{\Leftrightarrow} E = 1$$

β) i) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = \alpha + \beta = 10 \quad \text{και}$$

$$P = x_1 x_2 = \alpha\beta = 1$$

Μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τα μήκη α και β είναι η:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 1 = 0 \quad (2)$$

ii) Τα α , β είναι οι λύσεις της εξίσωσης (2). Η εξίσωση (2) έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 96$$

και ρίζες τις

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{96}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{16 \cdot 6}}{2} = \begin{cases} \frac{10+4\sqrt{6}}{2} = 5 + 2\sqrt{6} \\ \frac{10-4\sqrt{6}}{2} = 5 - 2\sqrt{6} \end{cases}$$

Άρα τα μήκη είναι $5 + 2\sqrt{6}$ και $5 - 2\sqrt{6}$.