

α) Είναι:

$$\begin{aligned} E &= E_{\text{ΑΘΜΚ}} + E_{\text{ΜΖΓΗ}} = \text{ΑΘ}^2 + \text{ΓΗ}^2 = \\ &= x^2 + (3-x)^2 = \\ &= x^2 + 9 - 6x + x^2 = \\ &= 2x^2 - 6x + 9 \end{aligned}$$

β) Έχουμε:

$$\begin{aligned} E &\geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 9 \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 18 \geq 9 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2x - 3)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

που ισχύει για κάθε $x \in (0, 3)$

γ) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} E &= \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 9 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 18 = 9 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Για $x = \frac{3}{2}$ το σημείο Θ είναι μέσο του ΑΒ, οπότε και το Μ μέσο του ΑΓ.