

α) Ισχύει ότι:

$$x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x \quad (1)$$

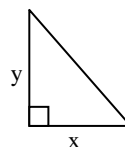
Πρέπει $x > 0$ και $y > 0$. Τότε:

$$y > 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 10 - x > 0 \Leftrightarrow x < 10$$

Άρα $0 < x < 10 \Leftrightarrow x \in (0, 10)$.

Το εμβαδόν ενός τριγώνου με μήκη πλευρών x και y υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{1}{2}xy \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} E(x) = \frac{1}{2}x(10 - x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow E(x) = \frac{1}{2}(10x - x^2), \quad x \in (0, 10) \end{aligned}$$



β) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} E(x) &\leq \frac{25}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(10x - x^2) \leq \frac{25}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 10x - x^2 \leq 25 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x - 5)^2 \geq 0, \text{ ισχύει για κάθε } x \in (0, 10) \end{aligned}$$

γ) Είναι:

$$\begin{aligned} E(x) &= \frac{25}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(10x - x^2) = \frac{25}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 10x - x^2 = 25 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \end{aligned}$$

Επομένως για $x = 5$ το εμβαδόν γίνεται μέγιστο.

Για $x = 5$ η σχέση (1) δίνει: $y = 10 - 5 = 5$. Στην περίπτωση αυτή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.