

α) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)}{1} = 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) \quad \text{και}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{16}{1} = 16$$

i) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι:

$$\begin{aligned}\Pi &= 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = \\ &= 2 \cdot 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) = 8\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)\end{aligned}$$

ii) Το εμβαδόν είναι:

$$E = x_1 x_2 = 16$$

Είναι:

$$\begin{aligned}\Pi &\geq 16 \Leftrightarrow 8\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) \geq 16 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda + \frac{1}{\lambda} \geq 2 \stackrel{\lambda > 0}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 + 1 \geq 2\lambda \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 \geq 0,\end{aligned}$$

το οποίο ισχύει για κάθε $\lambda \in (0, 4)$.

β) Ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}\Pi &= 16 \Leftrightarrow 8\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) = 16 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda + \frac{1}{\lambda} = 2 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 2\lambda \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda = 1\end{aligned}$$

Για $\lambda = 1$ η εξίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned}x^2 - 8x + 16 &= 0 \Leftrightarrow (x - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4\end{aligned}$$

Δηλαδή η εξίσωση έχει διπλή ρίζα το οποίο σημαίνει ότι $x_1 = x_2 = 4$ κι επομένως το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.