α) Το τριώνυμο $x^2 - 5\lambda x - 1$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -5\lambda$, $\gamma = -1$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 25\lambda^2 + 4$$

Επειδή για κάθε $\lambda \in R$ ισχύει $\Delta = 25\lambda^2 + 4 > 0$ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-5\lambda}{1} = 5\lambda \quad \text{και}$$

$$P = x_1x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-1}{1} = -1$$

i) Τότε:

$$(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1x_2)^{24} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5\lambda)^2 - 18 - 7(-1)^{24} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25\lambda^2 - 18 - 7 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25\lambda^2 = 25 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1)$$

ii) Για $\lambda = 1$ είναι:

$$S = x_1 + x_2 = 5 \quad \text{και} \quad P = x_1x_2 = -1$$

Τότε:

$$x_1^2x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1x_2^2 =$$

$$= x_1x_2(x_1 + x_2) - 3(x_1 + x_2) + 4 =$$

$$= -1 \cdot 5 - 3 \cdot 5 + 4 = -16$$