

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 > 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} > \sqrt{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |x-1| > 2 \Leftrightarrow (x-1 < -2 \text{ ή } x-1 > 2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x < -1 \text{ ή } x > 3) \end{aligned}$$

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ αν και μόνο αν:

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow |x-1| + 2 > 0$$

το οποίο ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $|x-1| \geq 0$ και $2 > 0$.

γ) Οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 = |x-1| + 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |x-1|^2 - |x-1| - 6 = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Θέτουμε $|x-1| = y$ (2) οπότε η εξίσωση (1) γράφεται:

$$y^2 - y - 6 = 0$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 > 0$$

και ρίζες τις:

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{1+5}{2} = 3 \\ \frac{1-5}{2} = -2 \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε στην ισότητα (2) και βρίσκουμε:

- $|x-1| = 3 \Leftrightarrow (x-1 = -3 \text{ ή } x-1 = 3) \Leftrightarrow (x = -2 \text{ ή } x = 4)$
- $|x-1| = -2$, αδύνατη.

Αντικαθιστούμε $x = -2$ στον τύπο της συνάρτησης g και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} g(-2) &= |-2-1| + 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow g(-2) = |-3| + 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow g(-2) = 5 \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε $x = 4$ στον τύπο της συνάρτησης g και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} g(4) &= |4-1| + 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow g(4) = |3| + 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow g(4) = 5 \end{aligned}$$

Τελικά τα σημεία τομής έχουν συντεταγμένες:

$A(-2, 5)$ και $B(4, 5)$