

α) Το τέρμα Μ, ώστε η χελώνα να κερδίσει τον αγώνα θα πρέπει να βρίσκεται σε οποιαδήποτε θέση για την οποία ισχύει:

$$\begin{aligned} S_X(t) &> S_A(t) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 600 + 40t > 10t^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 10t^2 - 40t - 600 < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t^2 - 4t - 60 < 0 \end{aligned}$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-60) = 16 + 240 = 256 > 0$$

και ρίζες τις:

$$t_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{256}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 16}{2} = \begin{cases} \frac{4+16}{2} = 10 \\ \frac{4-16}{2} = -6 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

t	$-\infty$	-6	10	$+\infty$	
$t^2 - 4t - 60$	+	○	-	○	+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$t^2 - 4t - 60 < 0 \Leftrightarrow -6 < t < 10 \Leftrightarrow t \in (-6, 10)$$

Επειδή όμως είναι $t \geq 0$ συμπεραίνουμε ότι:

$$t \in [0, 10)$$

Τότε:

$$\begin{aligned} 0 \leq t < 10 &\Leftrightarrow 0 \leq 40t < 400 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 600 + 0 \leq 600 + 40t < 600 + 400 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 600 \leq S_A(t) < 1000 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Άρα, το Μ μπορεί να απέχει λιγότερο από 1000 μέτρα από το σημείο Ο και η χελώνα θα έχει διαρκώς προβάδισμα.

β) i) Ο λαγός φτάνει τη χελώνα τη χρονική στιγμή για την οποία ισχύει:

$$\begin{aligned} S_X(t) &= S_A(t) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 600 + 40t = 10t^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 10t^2 - 40t - 600 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t^2 - 4t - 60 = 0 \stackrel{(\alpha)}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow t = 10 \text{ min} \end{aligned}$$

ii) Είναι:

$$\begin{aligned} S_A(12) &= 10 \cdot 12^2 = 10 \cdot 144 = 1440 \text{ μέτρα} \\ S_X(12) &= 600 + 40 \cdot 12 = 600 + 480 = 1080 \text{ μέτρα} \end{aligned}$$

Επομένως ο λαγός προηγείται της χελώνας και η μεταξύ τους απόσταση είναι:

$$1440 - 1080 = 360 \text{ μέτρα}$$

iii) Αναζητούμε τη χρονική στιγμή για την οποία ισχύει:

$$S_A(t) = 2250 \Leftrightarrow 10t^2 = 2250 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 225 \Leftrightarrow t^2 = 15^2 \stackrel{t \geq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow t = 15 \text{ min}$$