α) Θέτουμε στη δοθείσα εξίσωση $x^2 = y$, $(y \geq 0)$ (1). Τότε:

$$x^4 - 9x^2 + 20 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 9x^2 + 20 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 9y + 20 = 0$$

Η νέα εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 81 - 80 = 1$ και ρίζες:

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{9+1}{2} = 5 \\ \frac{9-1}{2} = 4 \end{cases}$$

- Για $y = 5$ η σχέση (1) δίνει:

$$x^2 = 5 \Leftrightarrow \left(x = -\sqrt{5} \text{ ή } x = \sqrt{5}\right)$$

- Για $y = 4$ η σχέση (1) δίνει:

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow (x = -2 \text{ ή } x = 2)$$

Τελικά, η εξίσωση έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

β) Θέτουμε $x^2 = \omega$, $(\omega \geq 0)$ οπότε η εξίσωση που θα κατασκευάσουμε θα είναι της μορφής:

$$\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0$$

Επειδή θέλουμε να έχει μια θετική και μια αρνητική θεωρούμε για παράδειγμα τις $\omega_1 = -1$ και $\omega_2 = 4$. Με τη χρήση των τύπων Vieta βρίσκουμε:

$$S = \omega_1 + \omega_2 = -1 + 4 = 3 \text{ και}$$

$$P = \omega_1\omega_2 = (-1) \cdot 4 = -4$$

Τότε η εξίσωση είναι η:

$$\omega^2 - S\omega + P = 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 3\omega - 4 = 0$$

και η αντίστοιχη διτετράγωνη, θέτοντας $x^2 = \omega$ είναι:

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$\omega^2 - 3\omega - 4 = 0 \Leftrightarrow (\omega = -1 \text{ ή } \omega = 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 = -1, \text{ αδύνατη ή } x^2 = 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -2 \text{ ή } x = 2)$$