α) Το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -3$, $\gamma = 2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 \\ \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

β) Θέτουμε στη δοθείσα εξίσωση $x^2 = y$ (3). Τότε:

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 3y + 2 = 0$$

Η εξίσωση που προέκυψε είναι ίδια με το σκέλος (α) οπότε έχει ρίζες τις $y_1 = 1$, $y_2 = 2$.

- Για $y = 1$ η σχέση (3) δίνει:

$$x^2 = 1 \Leftrightarrow (x = -1 \text{ ή } x = 1)$$

- Για $y = 2$ η σχέση (3) δίνει:

$$x^2 = 2 \Leftrightarrow \left(x = -\sqrt{2} \text{ ή } x = \sqrt{2}\right)$$

γ) Επειδή το ζητούμενο τριώνυμο έχει $\alpha = 1 > 0$ το πρόσημο του θα είναι αυτό που δίνεται στον πίνακα που ακολουθεί.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x^2 + \beta x + \gamma$		+	0	−	0	+	

όπου x_1, x_2 οι ρίζες του με $x_1 < x_2$ και $x_1, x_2 \in \left\{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\right\}$

Για να είναι $x^2 + \beta x + \gamma > 0$ για κάθε $x < 0$ πρέπει οι ρίζες του x_1, x_2 να είναι θετικές αφού είναι $0 < x_1 < x_2$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1η περίπτωση

Οι ρίζες να είναι $x_1 = 1$ και $x_2 = \sqrt{2}$. Τότε από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = 1 + \sqrt{2} \text{ και}$$

$$P = x_1 x_2 = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Το ζητούμενο τριώνυμο είναι το:

$$x^2 - Sx + P = x^2 - \left(1 + \sqrt{2}\right)x + \sqrt{2}$$

2η περίπτωση

Οι ρίζες να είναι $x_1 = 1$ και $x_2 = 1$. Τότε από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = 1 + 1 = 2 \text{ και}$$

$$P = x_1 x_2 = 1 \cdot 1 = 1$$

Το ζητούμενο τριώνυμο είναι το:

$$x^2 - Sx + P = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

3η περίπτωση

Οι ρίζες να είναι $x_1 = \sqrt{2}$ και $x_2 = \sqrt{2}$. Τότε από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \quad \text{και}$$

$$P = x_1 x_2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

Το ζητούμενο τριώνυμο είναι το:

$$x^2 - Sx + P = x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = \left(x - \sqrt{2}\right)^2$$