α) Έχουμε την εξίσωση $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$. Αν θέσουμε όπου $x^2 = u \ \ με \ \ u \geq 0$.

Η αρχική εξίσωση ισοδύναμα γίνεται $u^2 - 8u - 9 = 0$.

Έχουμε α=1, β= -8 και γ= -9 οπότε Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) = 65 + 36 = 100$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$u_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{2} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{8+\sqrt{100}}{2} = \frac{8+10}{2} = \frac{18}{2} = 9 \ \ δεκτή \\ \frac{8-\sqrt{100}}{2} = \frac{8-10}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \ \ απορρίπτεται \end{array} \right\}$$

Όμως έχουμε $x^2 = u \Leftrightarrow x^2 = 9 \ \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3$

β) Για τη εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, αν θέσουμε όπου $x^2 = u \ \ με \ \ u \geq 0$, η αρχική εξίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$u^2 + \beta u + \gamma = 0 \ (1).$$

i. Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα: $\Delta = \beta^2 - 4\gamma$, με:

$$\beta^2 \geq 0 \ και$$

$$\gamma < 0 \quad \acute{\alpha}\rho\alpha \quad -\gamma > 0.$$

Συνεπώς Δ>0 ως άθροισμα ενός μη αρνητικού και ενός θετικού αριθμού.

ii. Από τους τύπους Vieta το γινόμενο των ριζών της (1) είναι $P = \frac{\gamma}{\alpha} = \gamma < 0$. Άρα οι ρίζες $u_{1,2}$ είναι ετερόσημες. Έστω $\left\{ \begin{array}{c} u_1 < 0 \ απορρίπτεται \\ u_2 > 0 \ \ δεκτή \end{array} \right\}$

Τότε έχουμε $x^2 = u_2 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{u_2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{u_2}$