**α)** Το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$ έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = -(\lambda^2 + 1)$, $\gamma = \lambda$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = [-(\lambda^2 + 1)]^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \lambda =$$
$$= \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 =$$
$$= \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2$$

Επειδή για κάθε $\lambda \in R - \{0\}$ ισχύει $\Delta = (\lambda^2 - 1)^2 \geq 0$ το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

**β)** Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-(\lambda^2+1)}{\lambda} = \frac{\lambda^2+1}{\lambda} \text{ και}$$
$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

**γ)** Επειδή είναι $S = \frac{\lambda^2+1}{\lambda} > 0$ για $\lambda > 0$ και $P = 1 > 0$ οι ρίζες είναι θετικές.

**δ)** Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} \overset{(\gamma)}{\Leftrightarrow} \sqrt{1} \leq \frac{\frac{\lambda^2+1}{\lambda}}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{\lambda^2+1}{2\lambda} \overset{\lambda>0}{\Longleftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow 2\lambda \leq \lambda^2 + 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq \lambda^2 - 2\lambda + 1 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 \geq 0,$$

το οποίο ισχύει για κάθε $\lambda > 0$