α) Η εξίσωση:

$$x^2 + 2x + 3 = α \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 - α = 0 \quad (1)$$

έχει διακρίνουσα:

$$Δ = β^2 - 4αγ = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3 - α) =$$

$$= 4 - 12 + 4α = 4α - 8$$

i) Η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$Δ > 0 \Leftrightarrow 4α - 8 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4α > 8 \Leftrightarrow α > 2$$

ii) Η εξίσωση (1) έχει μια διπλή ρίζα αν και μόνο αν:

$$Δ = 0 \Leftrightarrow 4α - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 4α = 8 \Leftrightarrow α = 2$.Τότε η διπλή ρίζα είναι: x=-1

β) i) Είναι:

$$f(x) \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 \geq 0,$$

το οποίο ισχύει για κάθε $x \in R$.

ii) Ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$\sqrt{f(x) - 2} \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{f(x) - 2}\right)^2 \leq 2^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) - 2 \leq 4 \Leftrightarrow f(x) \leq 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 \leq 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \leq 0$$

Το τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$ έχει διακρίνουσα:

$$Δ_0 = β^2 - 4αγ = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-β \pm \sqrt{Δ}}{2α} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{2} = 1 \\ \frac{-2-4}{2} = -3 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
$x^2 + 2x - 3$	+	0	−	0	+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 + 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-3, 1]$$