

α) Το τριώνυμο $3x^2 + κx - 4$ έχει $α = 3$, $β = κ$, $γ = -4$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \kappa^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = \kappa^2 + 48$$

Επειδή ισχύει $\Delta > 0$, για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-4}{3} < 0$$

Άρα οι ρίζες είναι ετερόσημες.

γ) Επειδή $x_1 < x_2$ και οι ρίζες είναι ετερόσημες, ισχύει ότι:

$$x_1 < 0 \text{ και } x_2 > 0$$

Επίσης είναι: $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$, άρα:

$$\alpha < 0 \text{ και } \beta > 0 \quad (1)$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	α	x_1	x_2	β	$+\infty$
$3x^2 + \kappa x - 4$	+		○	○		+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$f(\alpha) > 0 \text{ και } f(\beta) > 0 \quad (2)$$

Από τις ανισώσεις των σχέσεων (1) και (2) βρίσκουμε:

$$\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta) < 0$$