α) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow 1 + 2 = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \beta = -3\alpha \quad (1)$$

και

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow 1 \cdot 2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \gamma = 2\alpha \quad (2)$$

β) i) Ισχύει ότι:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0 \Leftrightarrow \alpha(x - x_1)(x - x_2) > 0 \Leftrightarrow \alpha(x - 1)(x - 2) > 0 \quad (3)$$

Είναι:

$$1 < x < 2 \Leftrightarrow (1 < x \text{ και } x < 2) \Leftrightarrow (0 < x - 1 \text{ και } x - 2 < 0)$$

Άρα $(x - 1)(x - 2) < 0$. Τότε από την (3) συμπεραίνουμε ότι:

$$\alpha < 0$$

ii) Ισχύει ότι:

$$\gamma x^2 + \beta x + \alpha < 0 \overset{(1),(2)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha x^2 + (-3\alpha)x + \alpha < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha(2x^2 - 3x + 1) < 0 \overset{\alpha<0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 > 0$$

Το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$ έχει $\alpha = 2$, $\beta = -3$, $\gamma = 1$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} \frac{3+1}{4} = 1 \\ \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$2x^2 - 3x + 1$	$+$	0	$-$	0	$+$

Επομένως ισχύει:

$$2x^2 - 3x + 1 > 0 \Leftrightarrow \left(x < \frac{1}{2} \text{ ή } x > 1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$$