α) Το τριώνυμο $x^2 - \lambda x + 1$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -\lambda$, $\gamma = 1$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = \lambda^2 - 4$$

Η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 > 4 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2} > \sqrt{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\lambda| > 2 \Leftrightarrow (\lambda < -2 \text{ ή } \lambda > 2)$$

β) Αφού ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1) την επαληθεύει, ισχύει δηλαδή ότι:

$$\rho^2 - \lambda\rho + 1 = 0 \ \ (2) \text{ προφανώς } \rho \neq 0$$

Ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης (1) αν και μόνο αν:

$$\frac{1}{\rho^2} - \lambda\frac{1}{\rho} + 1 = 0 \overset{\cdot\rho^2}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \lambda\rho + \rho^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 - \lambda\rho + 1 = 0,$$

που ισχύει λόγω της (2).

γ) i) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-\lambda}{1} = \lambda > 0 \quad \text{και}$$

$$P = x_1x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{1} = 1$$

Επειδή $S > 0$ και $P > 0$ οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί.

ii) Ισχύει ότι:

$$P = x_1x_2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{x_1} \ \ (3)$$

Τότε:

$$x_1 + 4x_2 \geq 4 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} x_1 + 4\frac{1}{x_1} \geq 4 \overset{x_1>0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + 4 \geq 4x_1 \Leftrightarrow x_1^2 - 4x_1 + 4 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 2)^2 \geq 0, \text{ ισχύει}$$