

α) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-\beta}{1} = \beta$$

Είναι:

$$\begin{aligned} |x_1 + x_2| = 4 &\Leftrightarrow |S| = 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |\beta| = 4 &\Leftrightarrow (\beta = -4 \text{ ή } \beta = 4) \end{aligned}$$

β) Επειδή η δοθείσα εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \Delta > 0 &\Leftrightarrow \beta^2 - 4\gamma > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |\beta|^2 > 4\gamma &\Leftrightarrow 16 > 4\gamma \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \gamma < 4 \end{aligned}$$

γ) • Για $\beta = 4$ η εξίσωση (1) γράφεται:

$$x^2 - 4|x| + 3 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 4|x| + 3 = 0 \quad (2)$$

Θέτουμε στην εξίσωση (2) $|x| = y$ (3) με $y > 0$ και βρίσκουμε:

$$y^2 - 4y + 3 = 0 \quad (4)$$

Η εξίσωση (4) έχει διακρίνουσα $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$ και ρίζες τις:

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 \\ \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases} \text{ δεκτές}$$

• Για $y = 3$ η σχέση (3) δίνει:

$$|x| = 3 \Leftrightarrow (x = 3 \text{ ή } x = -3)$$

• Για $y = 1$ η σχέση (3) δίνει:

$$|x| = 1 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ή } x = -1)$$

• Για $\beta = -4$ η εξίσωση (1) γράφεται:

$$x^2 - (-4)|x| + 3 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 + 4|x| + 3 = 0 \quad (5)$$

Θέτουμε στην εξίσωση (5) $|x| = \omega$ (6) με $\omega > 0$ και βρίσκουμε:

$$\omega^2 + 4\omega + 3 = 0 \quad (7)$$

Η εξίσωση (7) έχει διακρίνουσα $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$ και ρίζες τις:

$$\omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{-4+2}{2} = -1 \\ \frac{-4-2}{2} = -3 \end{cases} \text{ απορρίπτονται}$$