α) Αντικαθιστούμε στην δοθείσα ισότητα $x = -5$ και βρίσκουμε:

$$\lambda = (2(-5) + 5)^2 - 8 \cdot (-5) =$$
$$= (-10 + 5)^2 + 40 = (-5)^2 + 40 =$$
$$= 25 + 40 = 65$$

β) Αντικαθιστούμε στην δοθείσα ισότητα $\lambda = 20$ και βρίσκουμε:

$$20 = (2x + 5)^2 - 8x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 20 = 4x^2 + 20x + 25 - 8x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 5 = 0$$

Το τριώνυμο $4x^2 + 12x + 5$ έχει $\alpha = 4$, $\beta = 12$, $\gamma = 5$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 144 - 80 = 64 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-12 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 4} = \frac{-12 \pm 8}{8} = \begin{cases} \frac{-12+8}{8} = -\frac{1}{2} \\ \frac{-12-8}{8} = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

γ) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$\lambda = (2x + 5)^2 - 8x \Leftrightarrow \lambda = 4x^2 + 20x + 25 - 8x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0 \quad (2)$$

i) Έστω ότι ο εξαγόμενος αριθμός μπορεί να γίνει $\lambda = 5$. Αντικαθιστώντας στη σχέση (2) βρίσκουμε:

$$4x^2 + 12x + (25 - 5) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 20 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 5 = 0 \quad (3)$$

Η εξίσωση (3) είναι αδύνατη διότι έχει διακρίνουσα $\Delta = -11 < 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο.

ii) Το τριώνυμο $4x^2 + 12x + (25 - \lambda)$ έχει $\alpha = 4$, $\beta = 12$, $\gamma = 25 - \lambda$.

Πρέπει η εξίσωση (2) να έχει πραγματικές ρίζες. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν:

$$\Delta_0 \geq 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot (25 - \lambda) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 144 - 400 + 16\lambda \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 16\lambda \geq 256 \Leftrightarrow \lambda \geq 16$$