

α) Το τριώνυμο $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2)$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = \lambda - \lambda^2$ και διακρίνουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (1 - 2\lambda)^2$$

Επειδή $\Delta = (1 - 2\lambda)^2 \geq 0$, η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 > 0 \Leftrightarrow 1 - 2\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \frac{1}{2}$$

Τελικά η εξίσωση έχει δύο ρίζες για $\lambda \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

γ) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-1}{1} = 1 \quad \text{και} \quad P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda - \lambda^2}{1} = \lambda - \lambda^2$$

Τότε:

$$d(x_1, x_2) = \frac{1}{d(x_1, x_2)} \Leftrightarrow d(x_1, x_2) \cdot d(x_1, x_2) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d^2(x_1, x_2) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x_1 - x_2|^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 2x_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1^2 - 4(\lambda - \lambda^2) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4(\lambda - \lambda^2) = 0 \Leftrightarrow \lambda - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda(1 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ή } 1 - \lambda = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 1)$$