α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το R αν και μόνο αν:

$$x^2 - x + \frac{\alpha}{4} \geq 0, \text{ για κάθε } x \in R$$

Ο συντελεστής του x^2 είναι α = 1 > 0 οπότε το τριώνυμο είναι μη αρνητικό αν και μόνο αν:

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{\alpha}{4} \Leftrightarrow 1 - \alpha \leq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq 1$$

β) i) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$ αν και μόνο αν:

$$f(0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{0^2 - 0 + \frac{\alpha}{4}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{\alpha}{4}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha = 1$$

ii) Για α = 1 ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}} = \sqrt{x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{(x - \frac{1}{2})^2} = \left|x - \frac{1}{2}\right|$$

Τότε:

$$f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ ή } x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}) \Leftrightarrow (x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{ ή } x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 1 \text{ ή } x = 0)$$