α) Το τριώνυμο $x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5)$ έχει α = 1, β = – λ, γ = – (λ^2 +5) και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot [-(\lambda^2 + 5)] = \lambda^2 + 4\lambda^2 + 20 = 5\lambda^2 + 20$$

β) Έχουμε $5\lambda^2 \geq 0$ για κάθε $\lambda \in R$ και $20 > 0$ οπότε $\Delta > 0$, για κάθε $\lambda \in R$ η εξίσωση

$$x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5) = 0$$

έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε $\lambda \in R$.

γ) $(x_1 - 2) \cdot (x_2 - 2) = -4 \Leftrightarrow x_1 x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 4 = -4 \Leftrightarrow x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 8 = 0$ (1)

Από τους τύπους Vieta έχουμε $x_1 + x_2 = S = \frac{-\beta}{\alpha} = \lambda$ και $x_1 x_2 = P = \frac{\gamma}{\alpha} = -(\lambda^2 + 5)$

Η εξίσωση (1) γίνεται:

$$-(\lambda^2 + 5) - 2\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow -\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

Το τριώνυμο $\lambda^2 + 2\lambda - 3$ έχει α = 1, β = 2, γ = – 3 και διακρίνουσα:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{2} = 1 \\ \frac{-2-4}{2} = -3 \end{cases}$$