α) Η εξίσωση γράφεται:

$$(x-2)^2 = \lambda(4x-3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 4\lambda x - 3\lambda \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 4\lambda x + 4 + 3\lambda = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4(1+\lambda)x + 4 + 3\lambda = 0$$

β) Το τριώνυμο $x^2 - 4(1+\lambda)x + 4 + 3\lambda$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -4(1+\lambda)$, $\gamma = 4 + 3\lambda$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = [-4(1+\lambda)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4+3\lambda) =$$
$$= 16 + 32\lambda + 16\lambda^2 - 16 - 12\lambda =$$
$$= 16\lambda^2 + 20\lambda$$

Η εξίσωση έχει πραγματικές και άνισες ρίζες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 16\lambda^2 + 20\lambda > 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 + 5\lambda > 0$$

Το τριώνυμο $4\lambda^2 + 5\lambda$ έχει ρίζες τις:

$$4\lambda^2 + 5\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(4\lambda+5) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\lambda = -\frac{5}{4} \text{ ή } \lambda = 0\right)$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

λ	$-\infty$	$-\frac{5}{4}$		0	$+\infty$
$4\lambda^2 + 5\lambda$	$+$	0	$-$	0	$+$

Επομένως ισχύει:

$$4\lambda^2 + 5\lambda > 0 \Leftrightarrow \left(\lambda < -\frac{5}{4} \text{ ή } \lambda > 0\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda \in \left(-\infty, -\frac{5}{4}\right) \cup (0, +\infty)$$

γ) **i)** Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-4(1+\lambda)}{1} = 4(1+\lambda) \quad \text{και}$$
$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{4+3\lambda}{1} = 4 + 3\lambda$$

ii) Είναι:

$$A = (4x_1 - 3)(4x_2 - 3) =$$
$$= 16x_1x_2 - 12x_1 - 12x_2 + 9 =$$
$$= 16x_1x_2 - 12(x_1 + x_2) + 9 =$$
$$= 16(4+3\lambda) - 12 \cdot 4(1+\lambda) + 9 =$$
$$= 64 + 48\lambda - 48 - 48\lambda + 9 = 25$$