α) Το τριώνυμο $αx^2 – 5x + α$ έχει διακρίνουσα:

$$Δ = β^2 – 4αγ = (– 5)^2 – 4 \cdot α \cdot α = 25 – 4α^2$$

Η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς αν και μόνο αν:

$$Δ \geq 0 \Leftrightarrow 25 – 4α^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow – 4α^2 \geq – 25 \Leftrightarrow α^2 \leq \frac{25}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{α^2} \leq \sqrt{\frac{25}{4}} \Leftrightarrow |α| \leq \frac{5}{2}$$

Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, τότε από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$P = x_1x_2 = \frac{γ}{α} = \frac{α}{α} = 1$$

Άρα οι ρίζες x_1, x_2 είναι αντίστροφοι αριθμοί.

β) Για $α = 2$ η εξίσωση γράφεται:

$$2x^2 – 5x + 2 = 0$$

Το τριώνυμο $2x^2 – 5x + 2$ έχει $α = 2$, $β = – 5$, $γ = 2$ και διακρίνουσα:

$$Δ = β^2 – 4αγ = (– 5)^2 – 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 – 16 = 9 > 0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-β \pm \sqrt{Δ}}{2α} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{5+3}{4} = 2 \\ \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

γ) Θέτουμε στη δοθείσα εξίσωση $x + \frac{1}{x} = y$ (1), οπότε γράφεται:

$$2y^2 – 5y + 2 = 0 \quad (2)$$

Η εξίσωση (2) λύθηκε στο σκέλος (ii) και προέκυψε ότι:

$$y = 2 \text{ ή } y = \frac{1}{2}$$

- Για $y = 2$ η ισότητα (1) δίνει:

$$x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 – 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x – 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

- Για $y = \frac{1}{2}$ η ισότητα (1) δίνει:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 2 = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 – x + 2 = 0$$

Η εξίσωση αυτή έχει $Δ = (– 1)^2 – 4 \cdot 2 \cdot 2 = 1 – 16 = – 15 < 0$, οπότε είναι αδύνατη.