i) Είναι:

$$x^2 > x \Leftrightarrow x^2 - x > 0$$

Το τριώνυμο $x^2 - x$ έχει ρίζες τις:

$$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \text{ ή } x = 1)$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x^2 - x$		+	0	−	0	+	

Επομένως ισχύει:

$$x^2 - x > 0 \Leftrightarrow (x < 0 \text{ ή } x > 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$$

β) i) • $0 < 1$

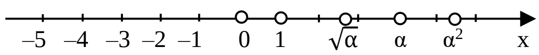
• $1 < \alpha \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} \sqrt{1} < \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow 1 < \sqrt{\alpha}$

• $1 < \alpha \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} \alpha < \alpha^2 \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} \sqrt{\alpha} < \sqrt{\alpha^2} \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} < \alpha$

• $1 < \alpha \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} 1 \cdot \alpha < \alpha \cdot \alpha \Leftrightarrow \alpha < \alpha^2$

Τελικά:

$$0 < 1 < \sqrt{\alpha} < \alpha < \alpha^2$$



ii) Ισχύει ότι:

- $\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha \cdot \alpha > 1 \cdot \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 > \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha > \alpha + \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha > 2\alpha \Leftrightarrow \frac{\alpha^2+\alpha}{2} > \alpha$
- $\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha \cdot \alpha > 1 \cdot \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 > \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha^2 > \alpha + \alpha^2 \Leftrightarrow 2\alpha^2 > \alpha + \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 > \frac{\alpha^2+\alpha}{2}$

Τελικά:

$$\alpha < \frac{\alpha^2+\alpha}{2} < \alpha^2$$