α) Το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$ έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = -(\lambda^2 + 1)$, $\gamma = \lambda$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-(\lambda^2 + 1))^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \lambda =$$
$$= \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 =$$
$$= (\lambda^2 - 1)^2$$

Επειδή $\Delta = (\lambda^2 - 1)^2 \geq 0$, για κάθε $\lambda > 0$ το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές.

Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-(\lambda^2+1)}{\lambda} = \frac{\lambda^2+1}{\lambda} \quad \text{και}$$
$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

Επειδή $S = \frac{\lambda^2+1}{\lambda} > 0$, για $\lambda > 0$ και $P = 1 > 0$, οι ρίζες είναι θετικές.

β) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου.

i) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι: $E = x_1 \cdot x_2 = 1$.

ii) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι: $\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2S = 2\frac{\lambda^2+1}{\lambda}$

Είναι:

$$\Pi \geq 4 \Leftrightarrow 2\frac{\lambda^2+1}{\lambda} \geq 4 \overset{\lambda>0}{\Longleftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow 2(\lambda^2 + 1) \geq 4\lambda \overset{:2}{\Leftrightarrow} \lambda^2 + 1 \geq 2\lambda \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 \geq 0,$$

το οποίο ισχύει για κάθε $\lambda > 0$.

iii) Έχουμε:

$$\Pi = 4 \Leftrightarrow 2\frac{\lambda^2+1}{\lambda} = 4 \overset{\lambda>0}{\Longleftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow 2(\lambda^2 + 1) = 4\lambda \overset{:2}{\Leftrightarrow} \lambda^2 + 1 = 2\lambda \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 1$$

Για $\lambda = 1$ το τριώνυμο γράφεται:

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

Στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι $x_1 = x_2 = 1$, οπότε το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.