α) Το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$ έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = -(\lambda^2 + 1)$, $\gamma = \lambda$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-(\lambda^2 + 1))^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \lambda =$$
$$= \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 =$$
$$= (\lambda^2 - 1)^2$$

Επειδή $\Delta = (\lambda^2 - 1)^2 \geq 0$, για κάθε $\lambda \in R - \{0\}$ το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές.

β) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-(\lambda^2+1)}{\lambda} = \frac{\lambda^2+1}{\lambda} \quad \text{και}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

γ) i) Επειδή $S = \frac{\lambda^2+1}{\lambda} < 0$, για $\lambda < 0$ και $P = 1 > 0$, οι ρίζες είναι αρνητικές.

ii) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$|x_1 + x_2| \geq 2x_1x_2 \Leftrightarrow |S| \geq 2P \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left|\frac{\lambda^2+1}{\lambda}\right| \geq 2 \cdot 1 \Leftrightarrow \frac{|\lambda^2+1|}{|\lambda|} \geq 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |\lambda^2 + 1| \geq 2|\lambda| \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 \geq 2|\lambda| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |\lambda|^2 - 2|\lambda| + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (|\lambda| - 1)^2 \geq 0,$$

το οποίο ισχύει για κάθε $\lambda \in R - \{0\}$