

α) Το τριώνυμο $x^2 - x + \lambda - \lambda^2$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = \lambda - \lambda^2$ και διακρίνουμε:

$$\begin{aligned}\Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) = \\ &= 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (1 - 2\lambda)^2\end{aligned}$$

Επειδή είναι $\Delta \geq 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

β) Η εξίσωση έχει δύο (πραγματικές) ρίζες αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned}\Delta > 0 &\Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - 2\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Επομένως η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

γ) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}S &= -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-1}{1} = 1 \text{ και} \\ P &= \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda - \lambda^2}{1} = \lambda - \lambda^2\end{aligned}$$

Η παράσταση A έχει νόημα πραγματικού αριθμού αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned}S - P > 0 &\Leftrightarrow 1 - (\lambda - \lambda^2) > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda + 1 > 0 \quad (2)\end{aligned}$$

Το τριώνυμο $\lambda^2 - \lambda + 1$ έχει διακρίνουμε:

$$\Delta_0 = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$$

Επομένως η ανίσωση (2) ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό λ .