α) Πρέπει:

$$|x| - 3 \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \neq -3 \text{ και } x \neq 3)$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = R - \{-3, 3\}$.

β) Θα παραγοντοποιήσουμε την παράσταση:

$$x^2 - 5|x| + 6 = |x|^2 - 5|x| + 6$$

Θέτουμε $|x| = y$ (1) και βρίσκουμε:

$$y^2 - 5y + 6$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

και ρίζες τις:

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Τότε:

$$y^2 - 5y + 6 = (y-2)(y-3) \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 5|x| + 6 = (|x| - 3)(|x| - 2)$$

Τελικά ο τύπος της f γίνεται:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3} = \frac{(|x|-3)(|x|-2)}{|x|-3} = |x| - 2,\ x \in \mathbb{R} - \{-3, 3\}$$

i) Η εξίσωση γράφεται:

$$(f(x) + 2)^2 - 4f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (|x| - 2 + 2)^2 - 4(|x| - 2) - 5 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x|^2 - 4|x| + 8 - 5 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x|^2 - 4|x| + 3 = 0$$

Θέτουμε $|x| = z$ (2) και βρίσκουμε:

$$z^2 - 4z + 3 = 0$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0$$

και ρίζες τις:

$$z_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 \\ \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$$

Τότε από την ισότητα (2) βρίσκουμε:

- $|x| = 3 \Leftrightarrow (x = -3$ ή $x = 3)$, απορρίπτονται
- $|x| = 1 \Leftrightarrow (x = -1$ ή $x = 1)$