α) • Είναι:

$$2 \le |x| \le 3 \Leftrightarrow (2 \le |x| \ \ (1) \ \ \text{και} \ \ |x| \le 3 \ \ (2))$$

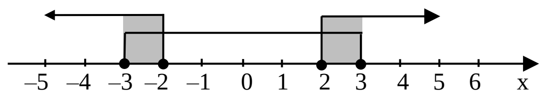
Από την ανίσωση (1) βρίσκουμε:

$$|x| \ge 2 \Leftrightarrow (x \le -2 \ \ \text{ή} \ \ x \ge 2) \ \ (3)$$

Από την ανίσωση (2) βρίσκουμε:

$$|x| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le x \le 3 \ \ (4)$$

Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (3) και (4) στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:



οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$-3 \le x \le -2 \ \ \text{ή} \ \ 2 \le x \le 3 \Leftrightarrow x \in [-3, -2] \cup [2, 3] \ \ (5)$$

• Το τριώνυμο $x^2 - 4x$ έχει ρίζες τις:

$$x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \ \ \text{ή} \ \ x = 4)$$

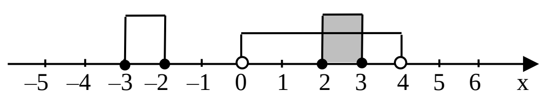
Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$x^2 - 4x$	+	–	+	

Επομένως ισχύει:

$$x^2 - 4x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4 \Leftrightarrow x \in (0, 4) \ \ (6)$$

β) Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (5) και (6) στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:



οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$2 \le x \le 3 \ \ \Leftrightarrow x \in [2, 3]$$

γ) Επειδή $\rho_1, \rho_2 \in [2, 3]$ ισχύει ότι:

$$2 \le \rho_1 \le 3 \ \ (7) \quad \text{και} \quad 2 \le \rho_2 \le 3 \ \ (8)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (7) και (8) και βρίσκουμε:

$$2 + 2 \le \rho_1 + \rho_2 \le 3 + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \le \rho_1 + \rho_2 \le 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{2} \le \frac{\rho_1+\rho_2}{2} \le \frac{6}{2} \Leftrightarrow 2 \le \frac{\rho_1+\rho_2}{2} \le 3$$

Άρα $\frac{\rho_1+\rho_2}{2} \in [2, 3]$, οπότε και ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση. Ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ εκφράζει το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία που αντιστοιχούν στους αριθμούς ρ_1, ρ_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών.