

α) Είναι:

$$\begin{aligned}|x-2| < 3 &\Leftrightarrow -3 < x-2 < 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -3+2 < x-2+2 < 3+2 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -1 < x < 5\end{aligned}$$

Το τριώνυμο  $x^2 - 2x - 8$  έχει  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -2$ ,  $\gamma = -8$  και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{2+6}{2} = 4 \\ \frac{2-6}{2} = -2 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

| x              | $-\infty$ | -2 | 4 | $+\infty$ |
|----------------|-----------|----|---|-----------|
| $x^2 - 2x - 8$ | +         | ○  | ○ | +         |

Επομένως ισχύει:

$$\begin{aligned}x^2 - 2x - 8 \leq 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4 &\Leftrightarrow x \in [-2, 4]\end{aligned}$$

β) Παριστάνουμε τις λύσεις των παραπάνω ανισώσεων στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:



οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$-1 < x \leq 4 \Leftrightarrow x \in (-1, 4]$$

γ) Επειδή  $\rho_1, \rho_2 \in (-1, 4]$  ισχύει ότι:

$$-1 < \rho_1 \leq 4 \quad (1) \quad \text{και} \quad -1 < \rho_2 \leq 4 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}-1 - 1 < \rho_1 + \rho_2 &\leq 4 + 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -2 < \rho_1 + \rho_2 &\leq 8 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{-2}{2} < \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} &\leq \frac{8}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -1 < \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} &\leq 4\end{aligned}$$

Άρα  $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \in (-1, 4]$ , οπότε και ο αριθμός  $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$  είναι κοινή τους λύση.

Ο αριθμός  $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$  εκφράζει το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία που αντιστοιχούν στους αριθμούς  $\rho_1, \rho_2$  πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.