

α) Το τριώνυμο $x^2 - (\alpha + 1)x + 4 + \alpha$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = [-(\alpha + 1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4 + \alpha) = (\alpha + 1)^2 - 4(4 + \alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 1 - 16 - 4\alpha = (\alpha^2 - 2\alpha + 1) - 16 = (\alpha - 1)^2 - 16$$

β) Το τριώνυμο $x^2 - (\alpha + 1)x + 4 + \alpha$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - 1)^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - 1)^2 > 16 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(\alpha - 1)^2} > \sqrt{16} \Leftrightarrow$$

$$|\alpha - 1| > 4 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - 1 < -4 \text{ ή } \alpha - 1 > 4) \Leftrightarrow$$

$$\alpha < -3 \text{ ή } \alpha > 5$$

γ) i) Είναι:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{-(\alpha+1)}{1} = \alpha + 1 \text{ και}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{4+\alpha}{1} = 4 + \alpha$$

ii) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} d(x_1, 1) \cdot d(x_2, 1) &= |x_1 - 1| \cdot |x_2 - 1| = |(x_1 - 1) \cdot (x_2 - 1)| = |x_1 x_2 - x_1 - x_2 + 1| = |P - S + 1| = \\ &= |4 + \alpha - \alpha - 1 + 1| = 4 \end{aligned}$$