α) Το τριώνυμο $(λ + 2)x^2 + (2λ + 3)x + λ – 2$ έχει

$$α = λ + 2,\ β = 2λ + 3,\ γ = λ – 2$$

και διακρίνουσα:

$Δ = β^2 – 4αγ = (2λ + 3)^2 – 4 \cdot (λ + 2) \cdot (λ – 2) = 4λ^2 + 12λ + 9 – 4(λ^2 – 2^2) = 4λ^2 + 12λ + 9 – 4λ^2 + 16 = 12λ + 25$

β) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$Δ > 0 \Leftrightarrow$$

$$12λ + 25 > 0 \Leftrightarrow$$

$$12λ > – 25 \Leftrightarrow$$

$$λ > -\frac{25}{12}$$

Επειδή επιπλέον πρέπει $λ \neq – 2$, τελικά βρίσκουμε:

$$λ \in \left(-\frac{25}{12}, -2\right) \cup (– 2, +\infty)$$

γ) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{β}{α} = -\frac{2λ+3}{λ+2} \quad \text{και}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{γ}{α} = \frac{λ-2}{λ+2}$$

δ) Για $λ \in \left(-\frac{25}{12}, -2\right) \cup (– 2, +\infty)$, είναι:

$$(x_1 + x_2 – 1)^2 + (x_1 \cdot x_2 + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(S – 1)^2 + (P + 3)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(S – 1 = 0 \ \text{και}\ P + 3) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(S = 1 \ \text{και}\ P = -3) \quad \overset{(γ)}{\Leftrightarrow}$$

$$\left(-\frac{2λ+3}{λ+2} = 1 \ \text{και}\ \frac{λ-2}{λ+2} = -3\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$(– (2λ + 3) = λ + 2 \ \text{και}\ λ – 2 = -3(λ + 2)) \quad \Leftrightarrow$$

$$(– 2λ – 3 = λ + 2 \ \text{και}\ λ – 2 = -3λ - 6) \quad \Leftrightarrow$$

$$(– 3λ = 5 \ \text{και}\ 4λ = -4) \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(λ = -\frac{5}{3} \ \text{και}\ λ = -1\right)$$

Επομένως δεν υπάρχει τιμή του λ που να ικανοποιεί τη δοσμένη σχέση.