α) Το τριώνυμο $x^2 - 2(\lambda-1)x + (\lambda+5)$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -2(\lambda-1)$, $\gamma = \lambda+5$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = [-2(\lambda-1)]^2 - 4\cdot 1\cdot(\lambda+5) = 4(\lambda^2-2\lambda+1) - 4\lambda - 20 = 4\lambda^2 - 12\lambda - 16$$

β) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow$$

$$4\lambda^2 - 12\lambda - 16 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 > 0 \qquad (2)$$

Το τριώνυμο $\lambda^2 - 3\lambda - 4$ έχει διακρίνουσα: $\Delta_0 = (-3)^2 - 4\cdot 1\cdot(-4) = 9 + 16 = 25 > 0$ και ρίζες τις:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3)\pm\sqrt{25}}{2\cdot 1} = \frac{3\pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{3+5}{2} = 4 \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

λ	$-\infty$ $\quad -1$ $\quad\quad 4$ $\quad +\infty$
$\lambda^2 - 3\lambda - 4$	$+$ $\quad 0 \quad$ $-$ $\quad 0 \quad$ $+$

Επομένως η (2) αληθεύει για:

$$\lambda < -1 \text{ ή } \lambda > 4$$

γ) Από τους τύπους Vieta για το τριώνυμο της εξίσωσης (1) βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-2(\lambda-1)}{1} = 2(\lambda-1) \quad \text{και}$$

$$P = x_1\cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda+5}{1} = \lambda + 5$$

Τότε, για $\lambda \in (-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$:

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{24} \quad \Leftrightarrow$$

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{24} \quad \Leftrightarrow$$

$$|x_1 - x_2|^2 = \sqrt{24}^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x_1 - x_2)^2 = 24 \quad \Leftrightarrow$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1\cdot x_2 = 24 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1\cdot x_2 - 2x_1\cdot x_2 = 24 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1\cdot x_2 = 24 \quad \Leftrightarrow$$

$$[2(\lambda-1)]^2 - 4(\lambda+5) = 24 \quad \Leftrightarrow$$

$$4(\lambda^2 - 2\lambda + 1) - 4\lambda - 20 - 24 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$4\lambda^2 - 12\lambda - 40 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 5 \text{ ή } \lambda = -2$$