α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$\Delta = [-(\lambda^2 + 1)]^2 - 4\cdot\lambda\cdot\lambda = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2$

Επειδή $\Delta \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$-{0}, το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

β) Το τριώνυμο έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = -(\lambda^2+1)$ και $\gamma = \lambda$. Οπότε:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-\beta}{\alpha} = \frac{-[-(\lambda^2+1)]}{\lambda} = \frac{\lambda^2+1}{\lambda}$$

$$P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

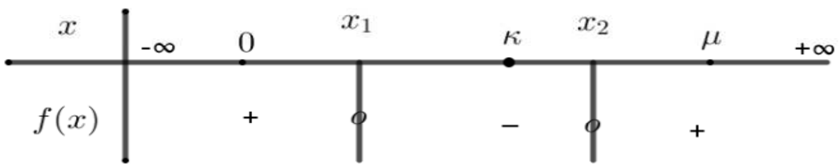
γ) Το γινόμενο των ριζών του τριωνύμου είναι $P = 1 > 0$, άρα οι ρίζες του είναι ομόσημες. Αν επιπλέον $\lambda > 0$, τότε και $S > 0$. Οπότε οι ρίζες θα είναι θετικές (δυο ομόσημοι αριθμοί των οποίων το άθροισμα είναι θετικό, είναι θετικοί).

δ) Για $\boldsymbol{\lambda > 0}$ και $\boldsymbol{\lambda \neq 1}$ το τριώνυμο f(x) έχει δυο ρίζες άνισες τις x_1 και x_2 που λόγω του γ) ερωτήματος είναι θετικές. Επίσης είναι δεδομένο ότι κ και μ είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε:

$$0 < x_1 < \kappa < x_2 < \mu$$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πρόσημο του τριωνύμου $f(x) = \lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda$, που έχει

$$\alpha = \lambda > 0$$



Από τον παραπάνω πίνακα προσήμου προκύπτει λοιπόν ότι:

f(0) > 0

f(κ) < 0

f(μ) > 0

Άρα: $f(0)\cdot f(\kappa)\cdot f(\mu) < 0$