α) Το τριώνυμο $\lambda x - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$ έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = -(\lambda^2 + 1)$, $\gamma = \lambda$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = [-(\lambda^2 + 1)]^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \lambda = (\lambda^2 + 1)^2 - 4\lambda^2 =$$

$$= \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 =$$

$$= (\lambda^2 - 1)^2 \geq 0, \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Άρα το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

β) Το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες αν και μόνο αν:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda - 1 = 0 \text{ ή } \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1$$

γ) Είναι $\lambda x - (\lambda^2 + 1)x + \lambda \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν:

$$(\lambda < 0 \text{ και } \Delta \leq 0) \Leftrightarrow$$

$$(\lambda < 0 \text{ και } (\lambda^2 - 1)^2 \leq 0) \Leftrightarrow$$

$$(\lambda < 0 \text{ και } (\lambda^2 - 1)^2 = 0) \Leftrightarrow$$

$$(\lambda < 0 \text{ και } \lambda^2 - 1 = 0) \Leftrightarrow$$

$$[\lambda < 0 \text{ και } (\lambda = -1 \text{ ή } \lambda = 1)]$$

Άρα $\lambda = -1$.