α) Η εξίσωση είναι $1^{ου}$ βαθμού όταν

$$8 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 8$$

β) Από το α) ερώτημα προκύπτει ότι η εξίσωση είναι $2^{ου}$ βαθμού για $\lambda \neq 8$. Για να έχει η εξίσωση αυτή μια διπλή ρίζα πρέπει:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow$$

$$[-2(\lambda - 2)]^2 - 4 \cdot (8 - \lambda) \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4(\lambda - 2)^2 - 4(8 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow$$

$$4(\lambda^2 - 4\lambda + 4) - 32 + 4\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$4\lambda^2 - 16\lambda + 16 - 32 + 4\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$4\lambda^2 - 12\lambda - 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

Το τριώνυμο $\lambda^2 - 3\lambda - 4$ έχει διακρίνουσα $\Delta' = 25$ και ρίζες τις

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{3+5}{2} = 4 \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{cases}$$

- Για $\lambda = 4$ η εξίσωση γράφεται:

$$(8 - 4)x^2 - 2(4 - 2)x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

που έχει διπλή ρίζα την $x = \dfrac{-\beta}{2\alpha} = \dfrac{-(-4)}{2 \cdot 4} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

- Για $\lambda = -1$ η εξίσωση γράφεται:

$$(8 + 1)x^2 - 2(-1 - 2)x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$9x^2 + 6x + 1 = 0$$

που έχει διπλή ρίζα την $x = \dfrac{-\beta}{2\alpha} = \dfrac{-6}{2 \cdot 9} = -\dfrac{1}{3}$

γ) Για $\lambda = 4$ το τριώνυμο γράφεται:

$$(8 - 4)x^2 - 2(4 - 2)x + 1 = 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2 \geq 0,$$

δηλαδή μη αρνητικό για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Για $\lambda = -1$ το τριώνυμο γράφεται:

$$(8 + 1)x^2 - 2(-1 - 2)x + 1 = 9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)^2 \geq 0$$

δηλαδή μη αρνητικό για κάθε πραγματικό αριθμό x.