

α) Είναι:

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \geq 2 \Leftrightarrow \frac{|\alpha|}{|\beta|} + \frac{|\beta|}{|\alpha|} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{|\alpha| \cdot |\beta|} \geq 2 \Leftrightarrow |\alpha|^2 + |\beta|^2 \geq 2|\alpha| \cdot |\beta| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\alpha| \cdot |\beta| \geq 0 \Leftrightarrow (|\alpha| - |\beta|)^2 \geq 0, \text{ ισχύει}$$

β) Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν:

$$(|\alpha| - |\beta|)^2 = 0 \Leftrightarrow |\alpha| - |\beta| = 0 \Leftrightarrow |\alpha| = |\beta| \Leftrightarrow (\alpha = \beta \text{ ή } \alpha = -\beta),$$

δηλαδή όταν οι αριθμοί είναι ίσοι ή αντίθετοι.