

**α)** Η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$\begin{aligned}\lambda x &= x + \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lambda x - x &= \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\lambda - 1)x &= (\lambda - 1)(\lambda + 1)\end{aligned}$$

**β)** Η παραπάνω εξίσωση έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν:

$$\lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$$

Η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η:

$$\begin{aligned}(\lambda - 1)x &= (\lambda - 1)(\lambda + 1) \stackrel{\lambda \neq 1}{\Leftrightarrow} \\ \Leftrightarrow \frac{(\lambda - 1)x}{\lambda - 1} &= \frac{(\lambda - 1)(\lambda + 1)}{\lambda - 1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \lambda + 1\end{aligned}$$

**γ)** Η εξίσωση είναι ταυτότητα αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned}(\lambda - 1 = 0 \text{ και } (\lambda - 1)(\lambda + 1) &= 0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\lambda = 1 \text{ και } \lambda - 1 = 0 \text{ ή } \lambda + 1 &= 0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\lambda = 1 \text{ και } \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lambda = 1\end{aligned}$$