

α) Είναι:

$$\begin{aligned}\alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 &= -12 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) &= -12 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha + \beta)^2 &= -12 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha\beta \cdot (-1)^2 &= -12 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha\beta &= -12\end{aligned}$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

με

$$S = \alpha + \beta = -1 \text{ και } P = \alpha\beta = -12$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2 + x - 12 = 0$$

Για $\alpha = 1$, $\beta = 1$ και $\gamma = -12$, βρίσκουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{-1+7}{2} = 3 \\ \frac{-1-7}{2} = -4 \end{cases}$$

Άρα είναι:

$$(\alpha = 3 \text{ και } \beta = -4) \text{ ή } (\alpha = -4 \text{ και } \beta = 3)$$