

α) Είναι:

$$\begin{aligned}\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20 &\Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha + \beta) = 20 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4(\alpha + \beta) = 20 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 5\end{aligned}$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

με

$$S = \alpha + \beta = 5 \text{ και } P = \alpha\beta = 4$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

Το τριώνυμο $x^2 - 5x + 4$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -5$, $\gamma = 4$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{5+3}{2} = 4 \\ \frac{5-3}{2} = 1 \end{cases}$$