α) Το τριώνυμο $3x^2 - 4x + 1$ έχει $\alpha = 3$, $\beta = -4$, $\gamma = 1$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 16 - 12 = 4 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm 2}{6} = \begin{cases} \frac{4+2}{6} = 1 \\ \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$3x^2 - 4x + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως ισχύει:

$$3x^2 - 4x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$$

β) Αφού οι αριθμοί α, β είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης ισχύει ότι:

$$\alpha \in \left[\frac{1}{3}, 1\right] \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \alpha \leq 1 \quad \text{και}$$

$$\beta \in \left[\frac{1}{3}, 1\right] \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \beta \leq 1$$

Τότε:

$$\frac{1}{3} \leq \alpha \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 3\alpha \leq 3 \quad (1) \quad \text{και}$$

$$\frac{1}{3} \leq \beta \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq 6\beta \leq 6 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$1 + 2 \leq 3\alpha + 6\beta \leq 3 + 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \leq 3\alpha + 6\beta \leq 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{9} \leq \frac{3\alpha + 6\beta}{9} \leq \frac{9}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{3\alpha + 6\beta}{9} \leq 1$$

Άρα και ο αριθμός $\frac{3\alpha + 6\beta}{9}$ είναι λύση της ανίσωσης.