

α) Για $\alpha = 2$, $\beta = 5$ και $\gamma = -1$, βρίσκουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 25 + 8 = 33 > 0$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1 και x_2 πραγματικές και άνισες.

β) Με τη βοήθεια των τύπων Vieta βρίσκουμε:

$$\bullet x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{5}{2}$$

$$\bullet x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{1}{2}$$

$$\bullet \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}} = 5$$

γ) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

με

$$S = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \stackrel{(\beta)}{\Leftrightarrow} S = 5 \text{ και}$$

$$P = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \stackrel{(\beta)}{\Leftrightarrow} P = \frac{1}{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow P = -2$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2 - 5x - 2 = 0$$