ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2021
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.
Αν
- Η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ,

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 7

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν f,g είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α και Β αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ είναι το $A\cap B$.

β) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0)=0$.

γ) Αν μια συνάρτηση f, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), παρουσιάζει στο σημείο $x_0\in(\alpha,\beta)$ καμπή, τότε $f''(x_0)=0$.

δ) Για οποιαδήποτε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$, ισχύει ότι $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ε) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο x_0.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$

και η συνάρτηση $g:\left[0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφή της είναι η συνάρτηση $f^{-1}(x)=\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$, $x<0$.

Μονάδες 8

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h=g\circ f^{-1}$ είναι η $h(x)=\dfrac{x-1}{x}$, $x<0$.

Μονάδες 6

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h του ερωτήματος Β2.

Μονάδες 6

Β4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(e^{-h(x)}\cdot \eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$, όπου h είναι η συνάρτηση του ερωτήματος Β2.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Κυκλική λίμνη έχει κέντρο Ο και ακτίνα R=1km. Ένας μαθητής μπορεί να κωπηλατεί με σταθερή ταχύτητα v_1 = 2km/h και μπορεί να βαδίζει με σταθερή ταχύτητα v_2 = 4km/h.

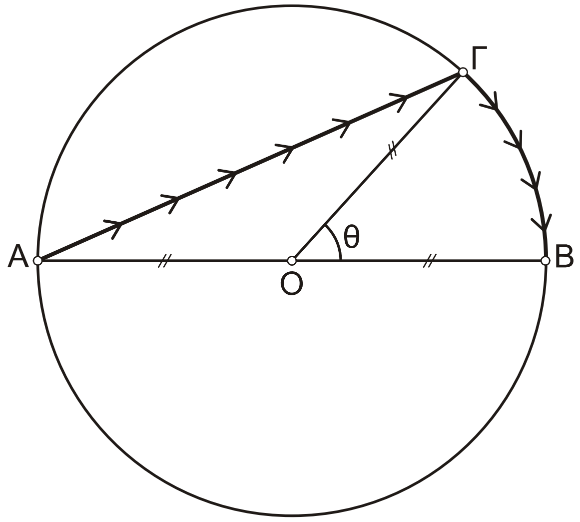
Ο μαθητής θέλει να κάνει μια βόλτα στη λίμνη, ξεκινώντας από το σημείο Α του σχήματος και καταλήγοντας στο αντιδιαμετρικό του σημείο Β.

Ο μαθητής μπορεί:

I. Να συνδυάσει κωπηλασία και βάδισμα, κωπηλατώντας ευθύγραμμα από το σημείο Α σε σημείο Γ της περιφέρειας της λίμνης, τέτοιο ώστε η γωνία $B\widehat{O}\Gamma=\theta$, $\theta\in(0,\pi)$ και στη συνέχεια να βαδίσει κατά μήκος του τόξου ΓΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

II. Να κωπηλατήσει ευθύγραμμα από το σημείο Α στο σημείο Β $\left(\theta=0\right)$.

III. Να βαδίσει στην περιφέρεια της λίμνης από το Α στο Β $\left(\theta=\pi\right)$.



Γ1. Να αποδείξετε ότι ο χρόνος (σε ώρες) που χρειάζεται, για να διανύσει την παραπάνω διαδρομή, ως συνάρτηση της γωνίας θ (σε ακτίνια) είναι

$$t(\theta) = \frac{1}{4}\theta + \text{συν}\frac{\theta}{2}\ ,\ \ \theta \in [0, \pi].$$

Δίνεται ότι σε έναν κύκλο ακτίνας R το μήκος S ενός τόξου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία θ (σε ακτίνια) είναι $S = R \cdot \theta$.

Μονάδες 8

Γ2. Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ ώστε ο χρόνος της βόλτας του μαθητή να γίνεται μέγιστος.

Μονάδες 9

Γ3. Σε ποια από τις επιλογές (Ι), (ΙΙ) ή (ΙΙΙ) ο χρόνος μετάβασης από το σημείο Α στο σημείο Β είναι ο ελάχιστος δυνατός; Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^x$

και συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = -x^2 + \alpha x\ ,\ \alpha \in \mathbb{R}$,

για την οποία το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\sqrt{-g(x)} + \alpha x\right)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που διέρχεται από το σημείο Μ(-1,0) είναι η ευθεία $\varepsilon : y = x + 1$ (μονάδες 3).

Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) > g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f(x-1)-x}{x-k} + \frac{f(x)-g(x)}{x-k-1} = 0\ , \quad k \in \mathbb{R} - \{1\}$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (k, k+1).

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ