ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό, σελίδα 133

Α2. Σχολικό, σελίδα 73

Α3. Σχολικό, σελίδα 128

Α4. **α)** Λ, **β)** Σ, **γ)** Σ, **δ)** Λ, **ε)** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για κάθε x>1:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right)' = -\frac{(1-\sqrt{x})'}{(1-\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2} > 0$$

Η f είναι γν. αύξουσα στο (1, +∞) οπότε ΄΄1-1΄΄ και αντιστρέφεται.

■ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{1-\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-x} \overset{\left(\frac{a}{0}\right)}{=} -\infty$

■ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{1-\sqrt{x}} = 0$

$$A_{f^{-1}} = f\big((1,+\infty)\big) = \left(\lim_{x\to 1^+} f(x), \lim_{x\to +\infty} f(x)\right) = (-\infty, 0)$$

Για x>1:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{1-\sqrt{x}} \Leftrightarrow 1-\sqrt{x} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{y-1}{y} \Leftrightarrow x = \left(\frac{y-1}{y}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \left(\frac{y-1}{y}\right)^2$$

Άρα

$$f^{-1}(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2, x < 0$$

Β2. $A_{g\circ f^{-1}} = \{x \in A_{f^{-1}} / f^{-1}(x) \in A_g\} =$

$$= \left\{x \in (-\infty, 0) / \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 \geq 0\right\} = (-\infty, 0)$$

Για x<0:

$$(gof^{-1})(x) = g\big(f^{-1}(x)\big) = \sqrt{\left(\frac{x-1}{x}\right)^2} =$$

$$= \left|\frac{x-1}{x}\right| \overset{x<0}{=} \frac{x-1}{x} \;\; άρα\; h(x) = \frac{x-1}{x}, x < 0$$

Β3. ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΕΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x-1}{x} \overset{\left(\frac{a}{0}\right)}{=} = +\infty$$

Άρα x=0 ΚΑΤ. ΑΣ. τηςC_h.

ΟΡΙΖΟΝΤΙΕΣ – ΠΛΑΓΙΕΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x-1}{x^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to -\infty} h(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x-1}{x} = 1$$

Άρα y=1 ΟΡ.ΑΣ. της C_h στο -∞.

Β4. Θέτουμε u= - h(x)

Αν x→0^- τότε u→-∞ (Β3).

Τότε

$$\lim_{x\to 0^-} e^{-h(x)} = \lim_{u\to -\infty} e^{u} = 0$$

Για κάθε x κοντά στο 0:

$$\left|e^{-h(x)} \cdot \eta\mu\frac{1}{x}\right| \leq \left|e^{-h(x)}\right| \Leftrightarrow -e^{-h(x)} \leq e^{-h(x)} \cdot \eta\mu\frac{1}{x} \leq e^{-h(x)}$$

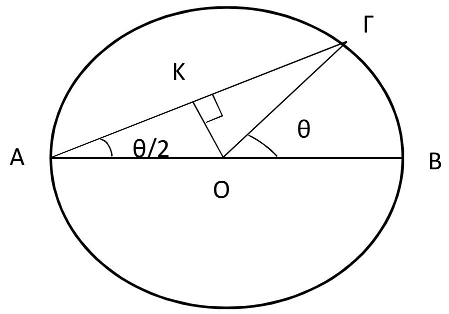
$$\lim_{x\to 0^-} \left(-e^{-h(x)}\right) = \lim_{x\to 0^-} e^{-h(x)} = 0$$

Από κ.π.

$$\lim_{x\to 0^-} \left(e^{-h(x)} \cdot \eta\mu\frac{1}{x}\right) = 0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.



Φέρνουμε το ύψος ΟΚ του ισοσκελούς τριγώνου $\overset{\Delta}{AO\Gamma}$ που είναι συγχρόνως και διάμεσος του. $\overset{\Lambda}{BA\Gamma} = \frac{\theta}{2}$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει στο ίδιο τόξο με την επίκεντρη $\overset{\Lambda}{BO\Gamma} = \theta$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2} = \frac{AK}{AO} = \frac{AK}{1} = AK$$

$$A\Gamma = 2AK = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}$$

Επίσης $\widehat{B\Gamma} = \theta$

Άρα

$$t(\theta) = \frac{A\Gamma}{V_1} + \frac{B\Gamma}{V_2} = \frac{A\Gamma}{2} + \frac{B\Gamma}{4} = \sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{4}, \theta \in [0, \pi]$$

Γ2. Η συνάρτηση t(θ) είναι παραγωγίσιμη στο [0, π] με $t'(\theta) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\eta\mu\frac{\theta}{2}$

$$t'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \overset{\frac{\theta}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]}{\Leftrightarrow} \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

Ο πίνακας μεταβολών για την συνάρτηση t(θ) είναι ο εξής:

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$t'(\theta)$	+		−
t	↗		↘

Η συνάρτηση t(θ) παρουσιάζει μέγιστο για θ=π/3.

Γ3. Η συνάρτηση t παρουσιάζει τ.ε για θ=0 με τιμή t(0)=1 και τ.ε για θ=π με τιμή t(π)=π/4. Όμως π/4<1 άρα η t παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για θ=π.

Τελικά ο χρόνος μετάβασης από το Α στο Β είναι ο ελάχιστος δυνατός στην επιλογή ΙΙΙ.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-\alpha x}+\alpha x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{1-\frac{\alpha}{x}}+\alpha\right)\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty}x=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1-\frac{\alpha}{x}}+\alpha\right)=1+\alpha$$

● Αν 1+α>0 ⇔α>-1 το όριο ισούται με +∞, άτοπο

● Αν 1+α<0 ⇔α< -1 το όριο ισούται με -∞, άτοπο

● αν 1+α=0⇔α= -1

Τότε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}\in IR$$

Δ2. Εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$: $y-e^{x_0}=e^{x_0}(x-x_0)$ (I). Αφού διέρχεται από το Μ(-1, 0): $-e^{x_0}=e^{x_0}(-1-x_0)$⇔…$x_0=0$.

Για $x_0=0$ η (Ι): $y-e^0=e^0x$⇔y=x+1.

Έστω g(x)=x+1⇔ $-x^2-x=x+1$⇔$x^2+2x+1=0$⇔ x= -1.

Άρα η Cg με την ευθεία y=x+1 έχουν ένα κοινό σημείο.

Επίσης: g΄(x)= -2x-1, g΄(-1)=1=λ_ε οπότε η y=x+1 εφάπτεται της Cg.

Δ3. f ΄΄(x)=e^x>0, x∈IR οπότε η f είναι κυρτή στο IR και επειδή η y=x+1είναι εφαπτομένη της Cf θα ισχύει $f(x)\geq x+1$ (II). Η ισότητα ισχύει μόνο για x=0.

$g''(x)= -2<0$, $x\in IR$ οπότε η g είναι κοίλη στο IR και επειδή η $y=x+1$ είναι εφαπτομένη της Cg θα ισχύει $g(x)\leq x+1$. Η ισότητα ισχύει μόνο για $x= -1$.

Επομένως $f(x)\geq x+1\geq g(x)$. Τελικά $f(x)>g(x)$.

Δ4. Θεωρούμε την συνάρτηση

$h(x)= (x-\kappa-1)[f(x-1)-x]+(x-\kappa)[f(x)-g(x)]$.

● Η h είναι συνεχής στο $[\kappa, \kappa+1]$

● $h(\kappa)= -[f(\kappa-1)-\kappa]<0$ διότι:

Για $x\neq 0$: (II) $f(x)>x+1$

Για $x=\kappa-1$: $f(\kappa-1)>\kappa \Leftrightarrow f(\kappa-1)-\kappa>0$ $\kappa\neq 1$.

●$h(\kappa+1)=f(h)-g(\kappa)>0$ από Δ3

$h(\kappa)\, h(\kappa+1)<0$

από Θ.Β η εξίσωση $h(x)=0\Leftrightarrow$

$$\frac{f(x-1)-x}{x-\kappa}+\frac{f(x)-g(x)}{x-\kappa-1}=0$$

έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο $(\kappa, \kappa+1)$.

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ

Ο ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

www.floropoulos.gr