

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2021  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ, ΣΕΛ. 135  
**A2.** ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ, ΣΕΛ. 51  
**A3.** ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ, ΣΕΛ. 23  
**A4.** α. Σ  
 β. Λ  
 γ. Σ  
 δ. Σ  
 ε. Σ

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.** Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , θέτουμε  $x+1=u \Leftrightarrow x = u - 1$  με  $u \in \mathbb{R}$

Οπότε  $f(u) = ue^{-(u-1)} = ue^{-u+1} = ue^{1-u}$

Οπότε  $f(x) = xe^{1-x}, x \in \mathbb{R}$ .

**B2.** Η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με  $f'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x}(1-x)' = e^{1-x} - xe^{1-x} = e^{1-x}(1-x)$

- Οι ρίζες και το πρόσημο της  $f'$  φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		M	

Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, 1]$

Η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[1, +\infty)$

Στο  $x=1$  η  $f$  παρουσιάζει μέγιστο το  $f(1)=1$

**B3.** Η  $f'$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f''(x) = e^{1-x}(1-x)'(1-x) + e^{1-x}(1-x)' = -e^{1-x}(1-x) - e^{1-x} = -e^{1-x}(1-x+1) = -e^{1-x}(2-x) = e^{1-x}(x-2)$

Οι ρίζες και το πρόσημο της  $f''$  φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$		ΣΚ	

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2021  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Η  $f$  είναι κοίλη στο  $(-\infty, 2]$

Η  $f$  είναι κυρτή στο  $[2, +\infty)$

Το σημείο  $A(2, f(2))$ , δηλαδή  $A(2, \frac{2}{e})$  είναι ΣΚ

Για τις ασύμπτωτες:

Για  $x \rightarrow -\infty$  ( $y = \lambda x + \beta$ )

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x e^{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x}$$

Θέτουμε  $1-x=u$

$$\text{Για } x \rightarrow -\infty \text{ είναι } u \rightarrow +\infty, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$$

Άρα η  $f$  δεν έχει ασύμπτωτες στο  $-\infty$

Για  $x \rightarrow +\infty$  ( $y = \lambda x + \beta$ )

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x}$$

Θέτουμε  $1-x=u$

Για  $x \rightarrow +\infty$  είναι  $u \rightarrow -\infty$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0 = \lambda$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^{1-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0$$

Άρα  $y=0$ , οριζόντια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$

B4. i.  $A_1 = (-\infty, 1]$ ,  $f \uparrow$  οπότε

$$F(A_1) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1)] = (-\infty, 1]$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x e^{1-x}) = -\infty \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = +\infty$$

$$f(1)=1$$

$A_2 = (1, +\infty)$ ,  $f \downarrow$  οπότε

$$f(A_2) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} f(x)) = (0, 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2021  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1 \text{ (αφού η } f \text{ είναι συνεχής στο } \mathbb{R} \text{ άρα και στο } x=1)$$

$$\text{Άρα, } f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, 1].$$

ii. Για  $\lambda > 1$  η εξίσωση  $f(x) = \lambda$  δεν έχει λύσεις στο  $\mathbb{R}$ .

Για  $\lambda = 1$  η εξίσωση  $f(x) = 1$  έχει μοναδική λύση την  $x = 1$ .

Για  $\lambda = 0$  η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μοναδική λύση την  $x = 0$ .

Για  $0 < \lambda < 1$  η εξίσωση  $f(x) = \lambda$  έχει δύο λύσεις μια στο  $(0, 1)$  και μια στο  $(1, +\infty)$ .

Για  $\lambda < 0$  η εξίσωση  $f(x) = \lambda$  έχει μια λύση στο διάστημα  $(-\infty, 0)$ .

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.**

- Στο διάστημα  $(-\infty, 0)$  η  $f$  έχει τύπο  $f(x) = ax^3 - 3x^2 - x + 1$  και είναι συνεχής ως πολυωνυμική.
- Στο διάστημα  $(0, \frac{3\pi}{2}]$  η  $f$  έχει τύπο  $f(x) = \sin x$  και είναι συνεχής.
- Εξετάζουμε αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ .

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax^3 - 3x^2 - x + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = \sin 0 = 0$$

$$f(0) = 1$$

Αφού  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ , τότε η  $f$  είναι συνεχής στο  $x = 0$ .

Άρα η  $f$  είναι συνεχής στο  $(-\infty, \frac{3\pi}{2}]$ .

- Για  $x < 0$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{ax^3 - 3x^2 - x + 1 - 1}{x} \\ &= \frac{ax^3 - 3x^2 - x}{x} = ax^2 - 3x - 1 \end{aligned}$$

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax^2 - 3x - 1) = -1$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2021  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

- Για  $0 < x < \frac{3\pi}{2}$  έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}$$

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$$

$$\text{Αφού } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Τότε η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0=0$ .

**Γ2. i.**

- Η  $f$  είναι συνεχής στο  $[0, \frac{3\pi}{2}]$ .
- Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, \frac{3\pi}{2})$  με  $f'(x) = (\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{2} = -1 \end{array} \right\} \text{οπότε } f(0) \neq f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\text{ii. Με } x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right) \text{ Έχουμε: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = \pi$$

Άρα  $\xi = \pi$  το μοναδικό σημείο του διαστήματος  $(0, \frac{3\pi}{2})$  για το οποίο ισχύει  $f'(\xi) = 0$

**Γ3.** Για κάθε  $x \in (-\infty, 0)$

$$\text{Έχουμε: } f'(x) = (ax^3 - 3x^2 - x + 1)' = 3ax^2 - 6x - 1$$

Το τριώνυμο  $3ax^2 - 6x - 1$  έχει διακρίνουσα

$$\Delta = 36 + 12a = 12(a + 3) < 0, \text{ αφού } a < -3$$

Επειδή  $3a < -9 < 0$  θα ισχύει ότι  $3ax^2 - 6x - 1 < 0$  για κάθε  $x \in (-\infty, 0)$

Άρα,  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in (-\infty, 0)$ , όποτε δεν υπάρχουν σημεία της  $C_f$  με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτόμενη της είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ .

- $f'(x) < 0$

**Γ4.** Έχουμε για κάθε  $x \in (-\infty, 0)$ .

- Για  $0 < x < \pi$  είναι  $f'(x) = -\eta\mu x < 0$ .
- Για  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$  είναι  $f'(x) = -\eta\mu x > 0$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2021  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Το πρόσημο της  $f'$ , η μονοτονία και τα ακρότατα της  $f$  φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

$x$	$-\infty$	$0$	$\pi$	$3\pi/2$
$f'(x)$		-	-	+
$f(x)$			-1 min	

- Αφού  $f'(x) < 0$  στο  $(-\infty, 0) \cup (0, \pi)$  και η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0=0$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(-\infty, \pi]$ .
- Άρα  $f'(x) > 0$  στο  $(\pi, \frac{3\pi}{2})$  και η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ .

Άρα στο  $x_0=\pi$  η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το  $f(\pi)=\sin\pi = -1$ .

Επομένως ισχύει  $f(x) \geq -1$  για κάθε  $x \in (-\infty, \frac{3\pi}{2}]$ .

### ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.**

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $K(x) = \ln x - \frac{1}{x}$ ,  $x \in [1, e]$ .

Η συνάρτηση  $K$  είναι συνεχής στο  $[1, e]$  ως διαφορά των συνεχών συναρτήσεων  $\ln x$  και  $\frac{1}{x}$

$$K(1) = \ln 1 - 1 = -1 < 0$$

$$K(e) = \ln e - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2021  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Οπότε  $f(1)f(e) < 0$ .

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (1, e)$  τέτοιο ώστε  $K(x_0) = 0$ .

Η  $K$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[1, e]$  με  $K'(x) = \left(\ln x - \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$  για κάθε  $x \in [1, e]$ .

Άρα η  $K$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[1, e]$ , οπότε η  $x_0$  είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης  $K(x) = 0$  δηλαδή της εξίσωσης  $\ln x = \frac{1}{x}$

**Δ2.**

Η  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, +\infty)$  ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  έχουμε :

$$f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = \frac{x - x_0}{x x_0}$$

Έχουμε  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{x x_0} = 0 \Leftrightarrow x - x_0 = 0 \Leftrightarrow x = x_0$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{x x_0} > 0 \xLeftrightarrow^{x, x_0 > 0} x - x_0 > 0 \Leftrightarrow x > x_0$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{x x_0} < 0 \xLeftrightarrow^{x, x_0 > 0} x - x_0 < 0 \Leftrightarrow x < x_0$$

Το πρόσημο της  $f'$ , η μονοτονία και τα ακρότατα της  $f$  φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

$x$	$0$	$x_0$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	↗	↗

min

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2021  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Άρα η  $f$  στο  $x_0$  παρουσιάζει ελάχιστο το

$$f(x_0) = \ln x_0 \cdot (x_0 + 1) - \ln x_0 - 1 =$$

$$x_0 \ln x_0 + \ln x_0 - \ln x_0 - 1 = x_0 \cdot \frac{1}{x_0} - 1 = 0$$

**Δ3.**

Οι τετμημένες των κοινών σημείων των  $C_g$  και  $C_h$  είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow xe^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \quad (1)$$

- Για  $x \leq 0$  η εξίσωση (1) είναι αδύνατη.
- Για  $x > 0$  έχουμε :

$$(1) \Leftrightarrow \ln(xe^{-x}) = \ln\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x + \ln e^{-x} = (x+1) \ln \frac{x_0}{e} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x - x = (x+1)(\ln x_0 - \ln e) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x - x = (x+1)(\ln x_0 - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x - x = (x+1)\ln x_0 - x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\ln x_0 - \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0.$$

Επειδή η  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο στο  $x_0$  ισχύει  $f(x) \geq f(x_0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  με την ισότητα να ισχύει μόνο για  $x = x_0$

Άρα  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2021  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Επομένως το σημείο με τετμημένη  $x_0$  είναι το μοναδικό κοινό σημείο των  $C_g$  και  $C_h$ .

$$\text{Οπότε } g(x_0) = h(x_0) \Leftrightarrow \frac{x_0}{e^{x_0}} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \quad (2)$$

Η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $g'(x) = (xe^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x) = \frac{1-x}{e^x}$

Η  $h$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $h'(x) = \left(\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\right)' = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \ln \frac{x_0}{e}$

Έχουμε  $g'(x_0) = \frac{1-x_0}{e^{x_0}}$  και  $h'(x_0) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \ln \frac{x_0}{e} \stackrel{(2)}{=} \frac{x_0}{e^{x_0}} (\ln x_0 - \ln e)$

$$= \frac{x_0}{e^{x_0}} \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) = \frac{x_0}{e^{x_0}} \cdot \frac{1-x_0}{x_0} = \frac{1-x_0}{e^{x_0}}$$

Οπότε  $g'(x_0) = h'(x_0)$

Άρα στο μοναδικό κοινό σημείο με τετμημένη  $x_0$  οι  $C_g$  και  $C_h$  έχουν κοινή εφαπτομένη.

#### Δ4.

Η απόσταση των σημείων  $A(x, f(x))$  και  $B(x, \varphi(x))$  είναι

$$d(x) = |f(x) - \varphi(x)| = f(x) - \varphi(x), \quad x \in (0, +\infty)$$

(αφού  $f(x) > \varphi(x)$  για κάθε  $x > 0$ )

- Αν η  $\varphi$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε το  $x_0$  είναι κρίσιμο σημείο της  $\varphi$ .
- Αν η  $\varphi$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε η συνάρτηση  $d$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , με  $d'(x_0) = f'(x_0) - \varphi'(x_0)$



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2021  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Η συνάρτηση  $d$  στο  $x_0$  που είναι εσωτερικό σημείο του  $(0, +\infty)$  είναι παραγωγίσιμη και παρουσιάζει ελάχιστο σ' αυτό, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat ισχύει ότι:

$$d'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) - \varphi'(x_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(x_0) = f'(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(x_0) = 0$$

Άρα το  $x_0$  είναι κρίσιμο σημείο της  $\varphi$ .

**ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ  
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ  
«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ  
ΚΟΥΣΗΣ Π. – ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Γ. – ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Β. – ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α.**