ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΑΒΒΑΤΟ 15 ΜΑΪΟΥ 2021

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- f′(x)=0 για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 7

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ′ ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Δίνεται ότι $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=\alpha$ τότε α=1.

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδής.

Μονάδες 1

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **(α).**

Μονάδες 3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας , δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λάθος.

α) Για κάθε αντιστρέψιμη συνάρτηση $f: A \to \mathcal{R}$ ισχύει:

$$f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x \text{ για κάθε } x\in A \text{ και } y \in f(A).$$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=1$

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0$.

δ) Η συνάρτηση f(x)=x^{α}, $\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

ε) Το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μιας συνάρτησης είναι το ολικό ελάχιστο της.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις **f(x)=lnx,** x>0 και **g(x)=1-e^{x}**, $x\in\mathcal{R}$.

Β1. Να προσδιορίσετε την *fog*.

Μονάδες 6

Αν $\boldsymbol{h(x) = (fog)(x) = ln(1 - e^x), x < 0}$

B2. Να δείξετε ότι η h αντιστρέφεται και ότι $h^{-1} = h$.

Μονάδες 6

B3. Να μελετήσετε την h ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα.

Μονάδες 6

B4. Δείξτε ότι η Ch και η ευθεία y=x έχουν μοναδικό κοινό σημείο με τετμημένη $x_o \in (-1,0)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f\colon \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ μια συνάρτηση με f(0)=1 , η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$\boldsymbol{f'(x) = -2xf(x), x \in \mathcal{R}}$**.**

Δίνεται και η συνάρτηση $\boldsymbol{g(x) = f(x)e^{x^2}, x \in \mathcal{R}}$**.**

Γ1. Δείξτε ότι η g είναι σταθερή στο $\mathcal{R}$ και να βρείτε τον τύπο της f.

Μονάδες 6

Αν **f(x)=** $\boldsymbol{e^{-x^2}, x \in \mathcal{R}}$

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 6

Γ3. Να δείξετε ότι η Cf έχει άξονα συμμετρίας τον y'y και να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της Cf.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x(f(x)-1)}$ **.**

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to \mathcal{R}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι

- $(x-1)f(1)\geq \ln x$ για κάθε $x>0$ και
- $\frac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{x-1}{x}$

Δ1. Δείξτε ότι **f(x)=x-lnx ,x>0 .**

Μονάδες 5

Δ2.

i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

ii. Δείξτε ότι η εξίσωση f(f(x)-1/3)=1 έχει ακριβώς δύο ρίζες.

Μονάδες 8

Δ3. Αν x_1, x_2 **με** $x_1<x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f\left(f(x)-\frac{1}{3}\right)=1$ τότε δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (x_1,x_2)$,τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη της Cf στο σημείο (ξ, f(ξ)) να διέρχεται από το σημείο **M(0,$\frac{4}{3}$).**

Μονάδες 7

Δ4. Να αποδείξετε ότι $f\big(f(x)\big)+f^2(x)\geq 2$ για κάθε $x>0$.

Μονάδες 5

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ(για τους εξεταζόμενους)</u>

1. Στο τετράδιό σας να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **<u>Να μην αντιγράψετε</u>** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **<u>Δεν επιτρέπεται να γράψετε</u>** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιό σας και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **<u>στο τετράδιό σας</u>** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

<u>ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ</u>