

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ  
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΥΡΙΑΚΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να διατυπώσετε το Θ. Rolle του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

A3. Έστω ο ισχυρισμός «Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη στο διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  εσωτερικό σημείο του  $\Delta$  στο οποίο η  $f$  είναι παραγωγίσιμη και ισχύει  $f'(x_0)=0$  τότε η  $f$  στο  $x_0$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο.

i. Απαντήστε με (Σ) ή (Λ) αν είναι σωστός ή λάθος.

Μονάδα 1

ii. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

A3. Αν  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$  τότε δείξτε ότι και η  $f+g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει  $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$ .

Μονάδες 7

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

i. Η  $f$  είναι 1-1 αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο  $y$  του συνόλου τιμών της η εξίσωση  $y=f(x)$  έχει ακριβώς μια λύση ως προς  $x$ .

ii. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ή  $-\infty$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

iii. Μια συνεχής συνάρτηση  $f$  διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία η διαδοχικές ρίζες της  $f$  χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

iv. Αν μια συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0 \in \Delta$  τότε η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .

v. Αν η  $f$  συνεχής στο  $\Delta$  και γν. αύξουσα στο  $\Delta$  τότε  $f'(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό  $x \in \Delta$ .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύει  $f(g(x)) = e^{x-2} + x - 2$  και  $g(x) = x - 1$ .

**B1.** Δείξτε ότι  $f(x)=e^{x-1}+x-1, x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 5**

**B2.** Δείξτε ότι η  $f$  αντιστρέφεται, να βρεθεί το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

**Μονάδες 7**

**B3.** Να βρείτε τα κοινά σημεία της  $C_{f^{-1}}$  με την ευθεία  $y=x$ .

**Μονάδες 4**

**B4.**

i. Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x)=0$  έχει μοναδική λύση  $x_0 \in (0, 1)$ .

**Μονάδες 5**

ii. Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{\ln x - g(x)}{f(x)}$

**Μονάδες 4**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x}, x \in [0, +\infty)$  και το σημείο  $A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ . Θεωρούμε επιπλέον την συνάρτηση  $g(x)=1-\ln x, x > 0$ .

**Γ1.** Να εκφράσετε ως συνάρτηση του  $x$  την απόσταση ενός σημείου  $M(x, y), y=f(x)$  της  $C_f$  από το σημείο  $A$ .

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Αν  $d(x) = \sqrt{x^2 - 2x + \frac{9}{4}}, x \geq 0$  είναι ο τύπος της απόστασης (AM) να βρείτε την τιμή του  $x$  ώστε η απόσταση να γίνεται ελάχιστη.

**Μονάδες 7**

**Γ3.** Ένα κινητό  $N$  ξεκινά από το σημείο  $O(0, 0)$  και κινείται στην  $C_f$ . Σε ποιο σημείο της  $C_f$  ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης  $x$  του  $N$  είναι διπλάσιος από τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης  $y$  του  $N$  αν  $x'(t) > 0$  για κάθε  $t \geq 0$ .

**Μονάδες 6**

**Γ4.**

i. Να προσδιορίσετε την  $f \circ g$ .

**Μονάδες 3**

ii. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f \circ g)^{x-1}}{x-1}$ .

**Μονάδες 3**

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x)=x \cdot \ln(x+\alpha)+1$ ,  $\alpha>0$  και  $x \in (-\alpha, +\infty)$ . Επίσης για κάθε  $x \in (-\alpha, +\infty)$  ισχύει  $f(x) \geq 1$ .

**Δ1.** Δείξτε ότι  $\alpha=1$

Για  $\alpha=1$ .

**Μονάδες 7**

**Δ2.** Να δείξετε ότι  $f$  είναι γν. φθίνουσα στο  $(-1, 0]=\Delta_1$  και γν. αύξουσα στο  $[0, +\infty)=\Delta_2$ .  
Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

**Μονάδες 6**

**Δ3. α)** Να δείξετε ότι η εξίσωση  $(x+1)^x=e$  έχει ακριβώς δύο ρίζες  $x_1, x_2$  με  $x_1 \in \Delta_1$  και  $x_2 \in \Delta_2$ .

**β)** Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in (x_1, x_2)$ :  $f'(x_0)+f(x_0)=2$ .

**Μονάδες 5**

**Δ4.** Δείξτε ότι  $f(x)+f(x+1)<f(x-1)+f(x+2)$  για κάθε  $x>-1$ .

**Μονάδες 7**

### Οδηγίες προς υποψηφίους

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**