

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ
Α. Φλωρόπουλου
για μαθητές με απαιτήσεις

30 ΧΡΟΝΙΑ ΔΕΙΞΤΕΛΙΑΣ

<http://www.floropoulos.gr> - email: info@floropoulos.gr

• ΚΕΝΤΡΟ ΑΘΗΝΑΣ: Βερανζέρου 6, Πλατεία Κάνιγγος, Τηλ.: 210-38.14.584, 38.02.012, Fax: 210-330.42.42
• ΑΓ. ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ: Λ. Βουλιαγμένης 244 (μετρό Δάφνης), Τηλ.: 210-9.76.76.76, 9.76.76.77

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Κυριακή 21 Φεβρουαρίου 2016

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

Να αποδείξετε ότι:

Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 10

A2. Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_f ;

Μονάδες 3

A3. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε λέμε ότι η f στρέφει κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ .

Μονάδες 2

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

ii. Αν $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$ τότε ισχύει $(\alpha^x)' = x \alpha^{x-1}$.

iii. Αν ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$, $g \circ f$ τότε πάντα ισχύει $f \circ g = g \circ f$.

iv. Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

v. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$ όπου f' , g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .

Μονάδες 9

B2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα το μηδέν.

Μονάδες 9

B3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x) dx$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2 \ln x$, $x > 0$.

G1. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 7

G2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 7

G3. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{f(x)}, & x > 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$

i. Να βρείτε την τιμή του k έτσι ώστε η g να είναι συνεχής.

Μονάδες 5

ii. Αν $k = -\frac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι η g έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0, e)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - \alpha) \ln x + x - 3$, $x > 0$.

Δ1. Αν $f(x) \geq -2$ για κάθε $x > 0$ να δείξετε ότι $\alpha = 2$.

Μονάδες 8

Δ2. Για $\alpha=2$ να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δυο θετικές ρίζες.

Μονάδες 5

Δ4. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του $\Delta 3$ με $x_1 < x_2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιος ώστε $\xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$ και ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 5

Καλή επιτυχία!!!