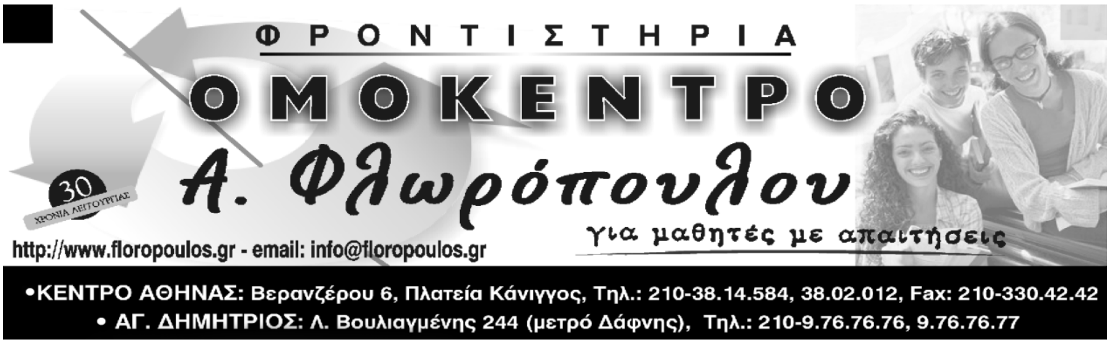

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Κυριακή 21 Φεβρουαρίου 2016

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου.

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου.

Α4. **i.** Σωστό

ii. Λάθος

iii. Λάθος

iv. Λάθος

v. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω $x_1, x_2 \in R$ με $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \frac{e^{x_1}-1}{e^{x_2}+1}=\frac{e^{x_2}-1}{e^{x_2}+1} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η f είναι 1-1.

Έστω $f(x)=y \Leftrightarrow \frac{e^x-1}{e^x+1}=y \Leftrightarrow \ell n\frac{1+y}{1-y}$ άρα $f^{-1}(x)=\ell n\frac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$.

Β2. $f^{-1}(x)=0 \Leftrightarrow \ell n\frac{1+x}{1-x}=\ell n1 \Leftrightarrow 1+x=1-x \Leftrightarrow x=0$.

Β3. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ell n\frac{1+x}{1-x}dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (x)'\ell n\frac{1+x}{1-x}dx=...=0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2x^2-2}{x}$ $\qquad f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
$f(x)$	‖	$\searrow$		$\nearrow$	

Στο x=1 η f παρουσιάζει ελάχιστο στο f(1)=1. Άρα f(x)≥1 για x>0.

Γ2. Για x→ +∝ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-2\ell nx}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-2\frac{\ell nx}{x}\right)=+\infty-0=+\infty$

Άρα δεν ορίζεται πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο +∝ επειδή $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$ η x=0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Γ3. i. g(0)=κ $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ell nx}{x^2-2\ell nx}=...=-\frac{1}{2}$.

Άρα κ=$-\frac{1}{2}$.

ii. g συνεχής στο [0, e]

g(0)= $-\frac{1}{2}$, $g(e)=\frac{\ell ne}{e^2-2\ell\ln e}=\frac{1}{e^2-2}>0$. Άρα g(0)·g(e)<0.

Οπότε από Θ. Bolzano η εξίσωση g(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0, e).

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε f(x)≥f(1) για κάθε x>0, οπότε η f στο x=1 παρουσιάζει ελάχιστο.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∝) με $f'(x)=\ell nx+\frac{x-\alpha}{x}+1$.

Από Θ. Format f ′(1)=0 δηλαδή 1-α+1=0⇔α=2.

Δ2. Για α=2 είναι $f'(x)=\ell nx+\frac{x-2}{x}+1$

Προφανής ρίζα η x=1 αφού f ′(1)=0

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
$f(x)$	‖	$\searrow$		$\nearrow$	

f(e)>0

$f\left(\frac{1}{e}\right)<0$

$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$ για κάθε x>0 άρα f ′ ↑ στο [0, +∞) οπότε η x=1 μοναδική ρίζα της f ′ (x)=0.

Δ3.

• Δ_1= (0, 1] (f ↓) άρα f(Δ_1)=$\left[f(1),\ \lim_{x\to 0^+} f(x)\right]=[-2,\ +\infty)$

Το Ο περιέχεται στο f(Δ_1) οπότε η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ_1.

• Δ_2=[1, +∞) (f ↑) άρα f(Δ_2)= $\left[f(1),\ \lim_{x\to +\infty} f(x)\right]=[-2,\ +\infty)$

Το Ο περιέχεται στο f(Δ_2) οπότε η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ_2.

Δ4. f(x_1)=0=f(x_2). Θεωρούμε $h(x)=\frac{f(x)}{x}$ εφαρμόζουμε Θ. Rolle για την h(x) στο [x_1, x_2]… άρα υπάρχει ξ∈(x_1, x_2): ή h′(ξ)=0 δηλαδή ξf ′(ξ)-f(ξ)=0.

Η εφαπτομένη της C_f στο Μ είναι y-f(ξ)=f ′(ξ)(x-ξ) και διέρχεται από το Ο(0, 0) όταν

ο-f(ξ)=f ′(ξ)(ο-ξ) ή ξf ′(ξ)-f(ξ)=0 που ισχύει.