ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Κυριακή 18 Δεκεμβρίου 2016

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου.

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου.

Α4. α) Σ, **β)** Λ, **γ)** Σ, **δ)** Λ.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Α=(0, +∞). Η f είναι παραγωγίσιμη στο Α με $f'(x)=3\frac{1}{x}+3e^{3x}+4>0$ για κάθε x∈A οπότε $f\uparrow$ στο Α.

Β2. • $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$

• $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

Β3. Προφανής ρίζα η $x=\frac{1}{2}$ αφού $f\left(\frac{1}{2}\right)=e^{3/2}$.

Η ρίζα είναι μοναδική αφού $f\uparrow$ στο Α.

Β4. Είναι $3\ell n4\mu+e^{6\mu}+8\mu-2=3\ell n2\left(\mu^2+1\right)+e^{3\left(\mu^2+1\right)}+4\left(\mu^2+1\right)-2$

$f(2\mu)=f\left(\mu^2+1\right)\overset{f1-1}{\Leftrightarrow}$

$\mu^2+1=2\mu$

$\mu^2-2\mu+1=0\Leftrightarrow\mu=1$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i) Η f είναι συνεχής στο [0, 1] ως πολυωνυμική (συνεχής στο R). Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0, 1) με $f'(x)=3\lambda x^2-2x-(\lambda-1)$

f(0)=0=f(1). Άρα από Θ. Rolle η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1).

ii) Είναι $3\lambda x-2=\frac{\lambda-1}{x}\Leftrightarrow 3\lambda x^2-2x-(\lambda-1)=0$

f ‘(x)=0. ΙΣΧΥΕΙ.

Γ2. i) Αρκεί να υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$:f ‘(ξ)=1.

Η f είναι συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β):

από ΘΜΤ υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$:

$\xi'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{\beta-\alpha}{\beta-\alpha}=1$. Αποδείχθηκε.

ii) Θεωρούμε g(x)=f(x)-α-β+x.

Η g είναι συνεχής [α, β] ως π.σ.σ.

g(α)=f(α)-α-β+α=α-α-β+α=α-β<0

g(β)=f(β)-α-β+β=β-α>0.

Άρα g(α)g(β)<0 οπότε από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$: $g(x_0)=0$ δηλαδή $f(x_0)-\alpha-\beta+x_0=0$ ή $f(x_0)=\alpha+\beta-x_0$.

iii) Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, x_0]$ και στο $[x_0, \beta]$ παραγωγίσιμη στο (α, x_0) και στο (x_0,β).

Οπότε από ΘΜΤ υπάρχουν

- $\xi_1\in(\alpha, x_0)$:$f'(\xi_1)=\frac{f(x_0)-f(\alpha)}{x_0-\alpha}=\frac{\alpha+\beta-x_0-\alpha}{x_0-\alpha}=\frac{\beta-x_0}{x_0-\alpha}$

- $\xi_2\in(x_0, \beta)$:$f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f(x_0)}{\beta-x_0}=\frac{\beta-\alpha-\beta+x_0}{\beta-x_0}=\frac{x_0-\alpha}{\beta-x_0}$

Οπότε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=\frac{\beta-x_0}{x_0-\alpha}\cdot\frac{x_0-\alpha}{\beta-x_0}=1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $xf(x)=\eta\mu x-xe^x$.

- Για $x\neq 0$ είναι $f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}-e^x$

- Η f είναι συνεχής οπότε $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}-e^x\right)=1-1=0$.

Άρα $f(x)=\begin{cases}\frac{\eta\mu x}{x}-e^x & ,\ x\neq 0\\ 0 & ,\ x=0\end{cases}$

Δ2. $\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-\eta\mu x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+xe^x-\sigma\upsilon\nu x}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^x+xe^x+\eta\mu x}{2}=\frac{1+1+0+0}{2}=1$

Δ3. Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $x_0=0$ είναι y-f(0)=f ΄(0)(x-0).

• f(0)=0

• $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\eta\mu x}{x}-e^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x-xe^x}{x^2}=-1$.

Άρα y =-x.

Δ4. Για κάθε x≠0 ισχύει $|\eta\mu x|<|x|\Leftrightarrow$

$$\frac{|\eta\mu x|}{|x|}<1\Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|<1\Leftrightarrow$$

$$-1<\frac{\eta\mu x}{x}<1\Leftrightarrow$$

$$-e^{-x}-1<\frac{\eta\mu x}{x}-e^{-x}<-e^{-x}+1\Leftrightarrow$$

$$-e^{-x}-1<f(x)<-e^{-x}+1$$

Δ5. Είναι $\dfrac{f(\alpha)+e^{\alpha}+1}{x-1}-\dfrac{f(\beta)+e^{\beta^2}-1}{x-2}=0\Leftrightarrow$

$(x-2)\left(f(\alpha)+e^{\alpha}+1\right)-(x-1)\left(f\left(\beta^2\right)+e^{\beta^2}-1\right)=0$

Θεωρούμε $h(x)=(x-2)\left(f(\alpha)+e^{\alpha}+1\right)-(x-1)\left(f\left(\beta^2\right)+e^{\beta^2}-1\right)$.

Η h είναι συνεχής στο [1, 2] ως π.σ.σ.

$h(1)=(1-2)\left(f(\alpha)+e^{\alpha}+1\right)=-\left(f(\alpha)++e^{\alpha}+1\right)<0$ αφού $f(\alpha)+e^{\alpha}+1>0$ λόγω Δ4.

$h(2)=-(2-1)\left(f\left(\beta^2\right)+e^{\beta^2}-1\right)=-\left(f\left(\beta^2\right)+e^{\beta^2}-1\right)>0$ αφού $f\left(\beta^2\right)+e^{\beta^2}-1<0$ λόγω Δ4.